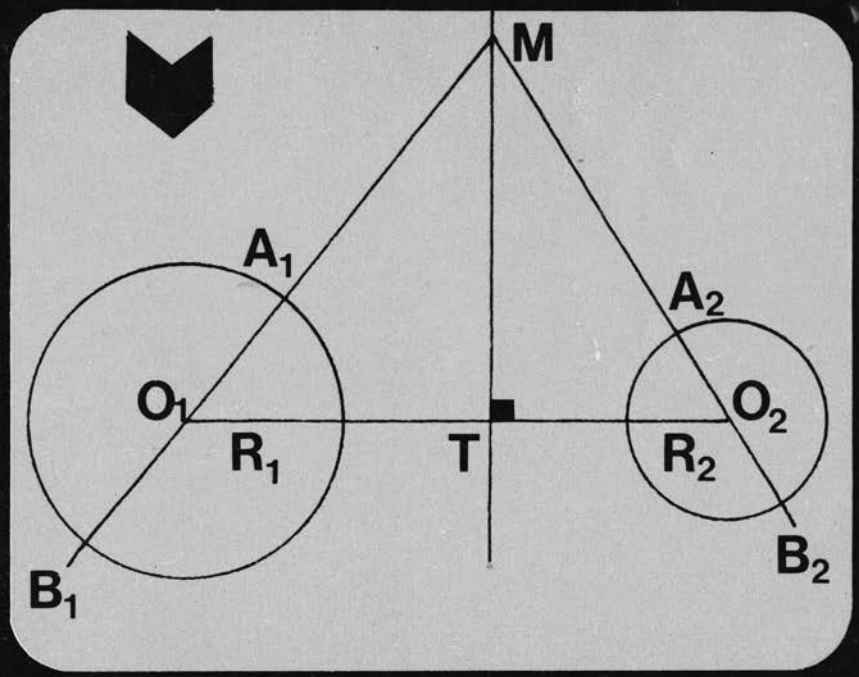
Luminița Bădeliță

DICTIONAR DE MATEMATICĂ

PENTRU CLASELE V–VIII



SCOLAR

Editura DANUBIUS

LUMINIȚA BĂDELIȚĂ

DICȚIONAR de MATEMATICĂ

pentru clasele V–VIII

EDITURA DANUBIUS
București

Dicţionarul a fost realizat în cadrul Editurii DANUBIUS

autor
prof. Luminiţa Bădeliţă

coordonator lexicografic
Teodora Badea

coperta
Nicolae Sârbu

corectura
Irina Predescu

referent ştiinţific
prof. doctor Constantin Radu
Catedra de matematică
Universitatea Politehnică Bucureşti

Tehnoredactare computerizată
Titus Guran,
Culegere texte Ileana Bengu, Irina Moroşanu
SOFTCHIM S. A.

Prefaţa

Dicţionarul de matematică pentru clasele V-VIII continuă seria de dicţionare DANUBIUS destinate elevilor.

Acest dicţionar, elaborat pe baza programei şcolare, se adresează elevilor din gimnaziu. El vine în sprijinul asimilării de către elevi a cunoştinţelor matematice nu numai prin definirea şi explicarea acestora ci şi printr-o riguroasă şi metodică exemplificare.

Lucrarea cuprinde noţiunile de bază despre teoria numerelor şi noţiuni de algebră, geometrie plană şi geometrie în spaţiu. Totodată au fost introduse şi unele noţiuni care depăşesc cadrul programei analitice gimnaziale, dar care sunt necesare pentru o mai bună înţelegere a celor din programă şi deschid noi direcţii învăţării matematicii în liceu. De asemenea, au fost schiţate portrete - viaţa şi opera - ale principalelor personalităţi, oameni de ştiinţă români şi străini, care au ilustrat, prin realizările lor, domeniul ştiinţelor matematice.

Dicţionarul este deosebit de util în activitatea elevilor la clasă ca şi în deprinderea exerciţiului independent, în activitatea cercurilor de matematică şi în pregătirea candidaţilor la admiterea în liceu. Lucrarea poate fi consultată cu succes şi de alţi utilizatori ai noţiunilor matematice de bază.

Editura

ADUNARE Operaţie fundamentală a aritmeticii prin care două sau mai multe numere date sunt reunite într-un singur număr. Rezultatul operaţiei este *suma* sau *totalul,* iar semnul operaţiei este plus (+).

Ex. :	4534 +	14,285 +
	307	3,81
Suma:	4841	0,7234
		Suma: 18,8184

Pentru a face *proba* unei sume se schimbă ordinea termenilor sau sensul în care se face adunarea.

Proprietăţi ale adunării:

1) suma mai multor numere nu depinde de ordinea termenilor;

2) suma mai multor numere nu se schimbă dacă se înlocuiesc două sau mai multe dintre ele prin suma lor efectuată;

3) dacă se măreşte sau se micşorează unul din termeni cu un număr oarecare suma se măreşte sau se micşorează cu acelaşi număr. V. *număr întreg, număr raţional.*

ALFABETUL GREC Totalitatea literelor, aşezate într-o ordine convenţională, reprezentând sunetele de bază din limba greacă. Se folosesc frecvent ca notaţii în matematică.

Alfabetul grec

A	α	alfa	a
B	β, b	beta	b
Γ	γ	gama	g
Δ	δ	delta	d
E	ε	epsilon	e scurt
Z	ξ	zeta	z

H	η	eta	e lung
Θ	θ	teta	th
I	ι	iota	i
K	k	kapa	k
Λ	λ	lambda	l
M	μ	miu	m
N	ν	niu	n
Ξ	ξ	csi	ks
O	o	omicron	o scurt
Π	π	pi	p
P	ρ	ro	r
Σ	σ, ς	sigma	s
T	τ	tau	t
Υ	υ	ipsilon	ü
Φ	φ	fi	ph, f
X	χ	hi	ch
Ψ	ψ	psi	ps

ALGEBRĂ Ramură a matematicii care se ocupă cu rezolvarea ecuaţiilor şi inecuaţiilor şi a sistemelor de ecuaţii şi inecuaţii. Deoarece posibilitatea de rezolvare a ecuaţiilor algebrice depinde de domeniul numerelor aflate la dispoziţie ca mulţime de bază, au fost incluse şi preocupările legate de structura domeniilor numerice.

ALGORITM Procedeu de calcul care după un număr finit de etape, stabilit univoc, oferă soluţia unei probleme date. Algoritmi sunt procedeele de calcul pentru determinarea sumei, diferenţei, produsului sau câtului a două numere. *Algoritmul lui Euclid* serveşte la determinarea celui mai mare divizor comun a două numere naturale. *Ciurul lui Eratostene* este un algoritm pentru determinarea tuturor numerelor prime sub o limită dată.

ALGORITMUL LUI EUCLID Metodă de aflare a celui mai mare divizor comun a două polinoame constând în împărţirea succesivă a celor două polinoame, apoi a împărţitorului la rest şi aşa mai departe. Ultimul rest diferit de zero pentru care împărţirea se face exact va fi cel mai mare divizor comun. Dacă ultimul rest va fi un număr diferit de zero, cele două polinoame sunt prime între ele.

$P(x) = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$

$Q(x) = X^4 - 5X^2 + 4$

$$\begin{array}{l|l} X^4+X^3-X^2+X-2 & X^4-5X^2+4 \\ \hline -X^4+5X^2-4 & 1 \\ \hline / \quad X^3+4X^2+X-6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} X^4-5X^2+4 & X^3+4X^2+X-6 \\ \hline -X^4-4X^3-X^2+6X & X-4 \\ \hline / \quad -4X^3-6X^2+6X+4 & \\ \quad -4X^3-16X^2+4X+4 & \\ \hline / \quad 10X^2+10X-20 & \\ \quad X^2+X-2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} X^3+4X^2+X-6 & X^2+X-2 \\ \hline -X^3-X^2+2X & X+3 \\ \hline / \quad 3X^2+3X-6 & \\ \quad -3X^2-3X+6 & \\ \hline \quad = \quad = \quad = & \end{array}$$

Ultimul rest diferit de zero este $D(x) = x^2 + x - 2$. Deci c.m.m.d.c. $(P(x), Q(x)) = x^2 + x - 2$

AMPLIFICARE Înmulţirea numărătorului şi numitorului unei fracţii cu acelaşi număr real, diferit de zero. Fracţia amplificată este echivalentă cu fracţia dată:

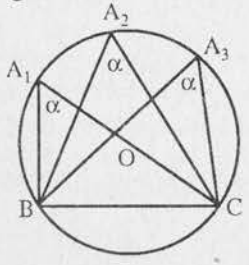
$$\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b} \qquad \text{Ex.: } \overset{2/}{\frac{5}{7}} = \frac{10}{14}$$

APOTEMĂ 1) Segment de dreaptă care uneşte centrul poligonului cu mijlocul unei laturi (poligon regulat). 2) Segment de dreaptă care uneşte vârful piramidei cu mijlocul uneia dintre laturile bazei (piramidă). 3) Segment de dreaptă care uneşte mijloacele a două laturi ale poligoanelor bazelor, de pe o aceeşi faţă laterală (trunchi de piramidă). În general, pentru un poligon regulat cu n laturi

$$a_n = R \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}$$

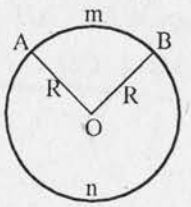
În particular $a_3 = \frac{R}{2}$; $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$; $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

ARC CAPABIL DE UNGHI DAT Locul geometric al punctelor din plan, din care un segment se vede sub un unghi dat α.



$\overset{\frown}{CA_2B}$ este capabil de unghiul α. Dacă $\alpha = 90^\circ$, arcul capabil este un semicerc. Orice unghi înscris într-un semicerc, este un unghi drept.

ARC DE CERC Porţiune de cerc cuprinsă între două puncte ale sale.



$\overset{\frown}{AmB}$ = arc mic de cerc.

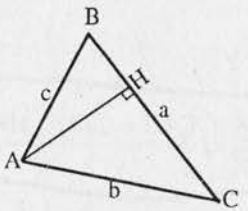
$\overset{\frown}{AnB}$ = arc mare de cerc.

Măsura unui arc mic $\overset{\frown}{AmB}$ este măsura unghiului la centru $\widehat{AOB}$ exprimată în grade. Se notează: $m(\overset{\frown}{AB})$. În acelaşi cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente.

Două drepte paralele care intersectează un cerc, determină pe acesta arce congruente.

ARHIMEDE (c. 287 - 212 î. hr.), învăţat grec. A avut preocupări în domeniul calculului lungimii curbelor, al raportului dintre lungimea cercului şi diametru (numărul Π).

ARIE Număr pozitiv asociat unui domeniu plan, ca măsură a lui.



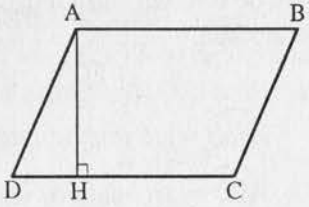
$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2}, \left(\frac{\text{baza} \cdot \text{înălţimea}}{2}\right)$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

(formula lui Heron).

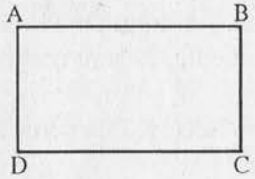
unde $p = \frac{a+b+c}{2}$, *(semiperimetru)*

Fig. 1. Aria triunghiului



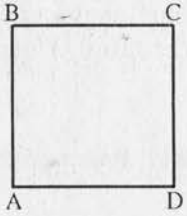
$$S_{ABCD} = DC \cdot AH$$
$$AH \perp CD$$

Fig. 2. Aria paralelogramului



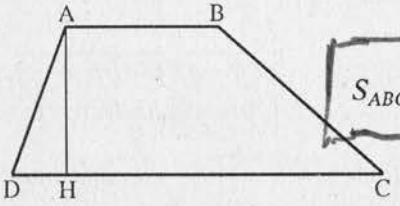
$$S_{ABCD} = AB \cdot BC$$

Fig. 3. Aria dreptunghiului



$$S_{ABCD} = AB^2$$

Fig. 4. Aria pătratului



$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AH}{2}$$

Fig. 5. Aria trapezului

Aria poligonului regulat cu n laturi este $S_n = \frac{p \cdot a_n}{2}$

unde p = perimetrul poligonului,

a_n = apotema poligonului

sau $S_n = nR^2 \sin\frac{180°}{n}\cos\frac{180°}{n}$

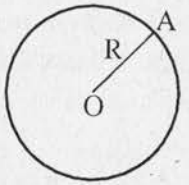
unde R = raza cercului circumscris poligonului şi n = numărul de laturi.

În particular

$S_3 = 3R^2 \sin 60° \cos 60° = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$, aria triunghiului echilateral.

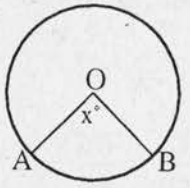
$S_4 = 4R^2 \sin 45° \cos 45° = 2R^2$, aria pătratului.

$S_6 = 6R^2 \sin 30° \cos 30° = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$, aria hexagonului regulat



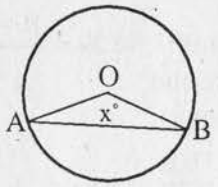
$$S_{cerc} = \pi R^2$$

Fig. 6. Aria cercului



$$S = \frac{\pi x^0 R^2}{360°}$$

Fig. 7. Aria sectorului circular



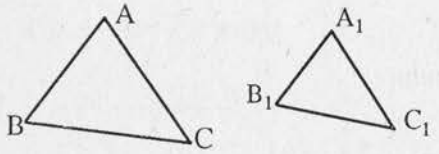
$$S = R^2\left(\frac{\pi x^0}{360^\circ} - \frac{\sin x^0}{2}\right)$$

Fig. 8. Aria segmentului circular

ARITMETICĂ Ramură a matematicii care studiază operaţiile şi proprietăţile numerelor naturale, întregi, raţionale, iraţionale, reale. Se ocupă şi cu divizibilitatea, teoria numerelor prime, rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi etc.

ASEMĂNARE Corespondenţă biunivocă între punctele a două figuri, care păstrează constant raportul distanţei dintre 2 puncte ale unei figuri şi al distanţei dintre punctele omologe ale celeilalte figuri.

Două triunghiuri se numesc asemenea dacă au toate laturile proporţionale şi unghiurile opuse lor respectiv congruente.

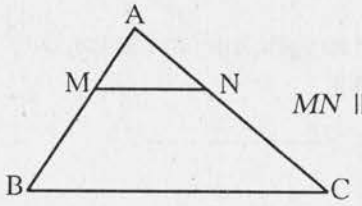


$m(\hat{A}) = m(\hat{A}_1)$,
$m(\hat{B}) = m(\hat{B}_1)$,
$m(\hat{C}) = m(\hat{C}_1)$,

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \qquad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$$

k = raportul de asemănare.

Teorema fundamentală a asemănării: o paralelă dusă la una din laturile unui triunghi, formează cu celelalte două laturi un triunghi asemenea cu cel dat.

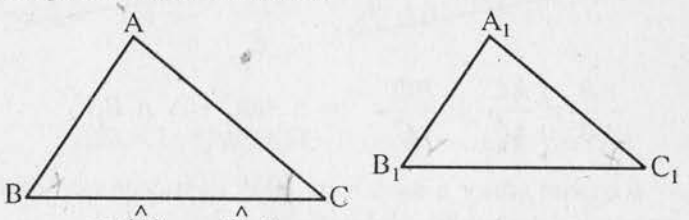


$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$

Două triunghiuri asemenea cu al treilea, sunt asemenea între ele.

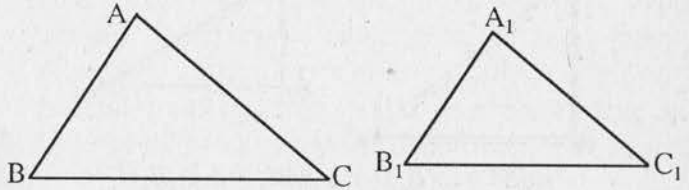
Cazuri de asemănare a triughiurilor:

1) Două triunghiuri care au două unghiuri respectiv congruente, sunt asemenea.



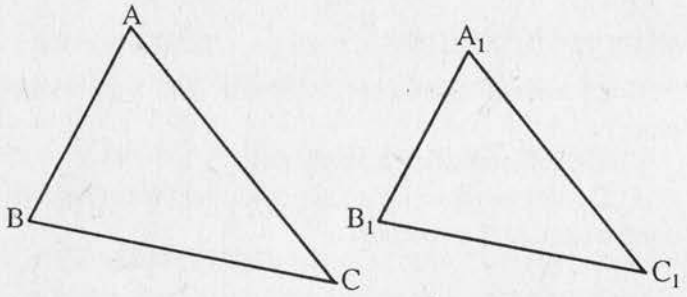
$m(\hat{A}) = m(\hat{A}_1)$
$m(\hat{B}) = m(\hat{B}_1)$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

2) Două triunghiuri care au un unghi congruent şi laturile care-l formează respectiv proporţionale, sunt asemenea.



$$\left.\begin{array}{l} m(\hat{A}) = m(\hat{A}_1) \\ \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

3) Două triunghiuri care au toate trei laturile respectiv proporţionale, sunt asemenea.

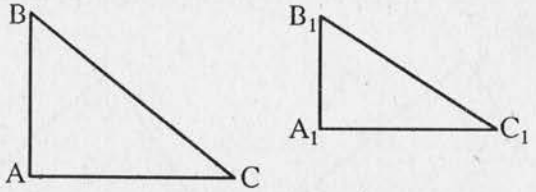


$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

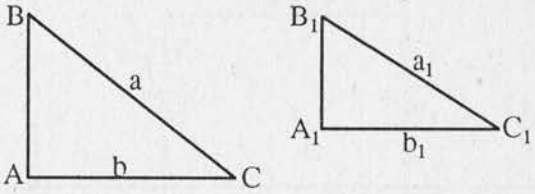
În cazul particular al triunghiurilor dreptunghice cazurile de asemănare vor fi:

1) Două triunghiuri dreptunghice sunt asemenea dacă au un unghi ascuţit congruent.



$m(B) = m(B_1) \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

2) Două triunghiuri dreptunghice sunt asemenea dacă au două laturi omoloage proporţionale.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

sau

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

ASOCIATIVITATE Proprietatea unei operaţii:

$(x * y) * z = x * (y * z)$

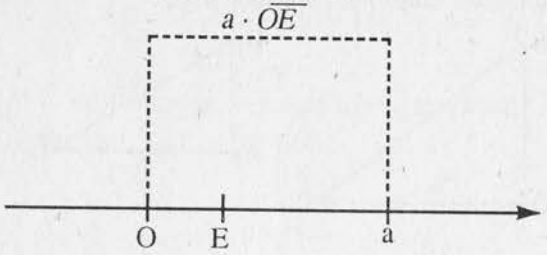
$(x + y) + z = x + (y + z), \ \forall\ x, y, z \in R.$

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

Noţiune introdusă de W. Hamilton (1837).

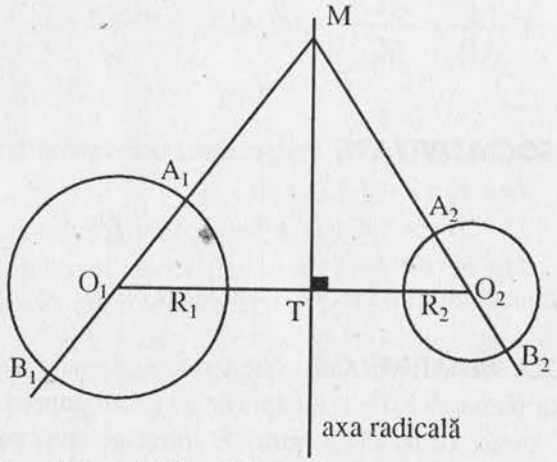
AXA NUMERELOR Numerele reale sunt ilustrate pe axa numerelor. Pe o dreaptă se alege un punct O (origine, punct zero) şi un punct E (punctul unu, punctul unitate). Se reprezintă numărul real a, ca un punct pe dreaptă, la distanţa $a \cdot \overline{OE}$ de O. Dacă a este pozitiv, punctul corespunzător se află de aceeaşi parte cu E. Direcţia de parcurgere a dreptelor numerelor se indică

printr-un vârf de săgeată (în partea pozitivă). Dacă $a < b$, punctul a este înaintea punctului b.



Axa numerelor

AXA RADICALĂ Locul geometric al punctelor care au aceeaşi putere faţă de două cercuri. Este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor.

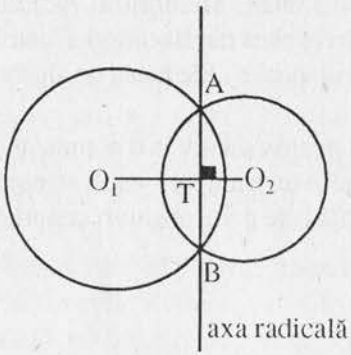


$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2$

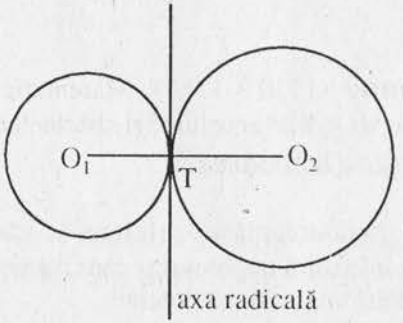
Cercurile concentrice nu au axă radicală.

Cercurile secante au ca axă radicală dreapta ce trece

prin punctele de intersecţie.



Cercurile tangente au ca rază radicală, tangenta în punctul comun.



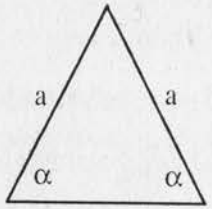
Tangenta comună a două cercuri este împărţită de axa radicală în două părţi congruente.

AXIOMĂ Propoziţie care exprimă un adevăr ce se admite fără demonstraţie.

Ex.: (În geometria euclidiană) Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.

BACALOGLU, Emanoil (1830 - 1891), fizician, chimist şi matematician român. Membru al Academiei Române. Profesor la Universitatea din Bucureşti. Contribuţii în geometrie. A elaborat manuale: „Elemente de algebră".

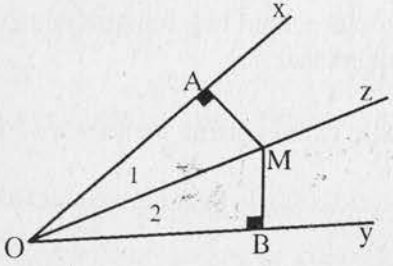
BAZĂ Număr strict pozitiv relativ la o noţiune matematică. În geometrie pentru un triunghi isoscel se numeşte bază, latura pe care se află cele două unghiuri congruente.



bază

BÉZOUT, Etienne (1730 - 1783) Matematician francez. Cercetări asupra teoriei ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii algebrice *(teorema lui Bézout).*

BISECTOARE semidreaptă cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul unghiului şi care formează cu laturile acestuia două unghiuri congruente.



$\sphericalangle xOz \equiv \sphericalangle zOy$

$m(\sphericalangle xOz) = m(\sphericalangle zOy)$

$[Oz$ este bisectoarea $\sphericalangle xOy$

Bisectoarea unui unghi

$M \in [Oz$

$MA \perp Ox$

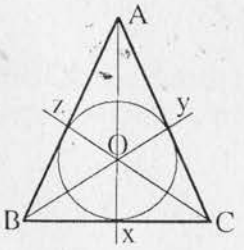
$MB \perp Oy$

$\Delta OAM \equiv \Delta OBM \Rightarrow [MA] \equiv [MB]$

Orice punct situat pe bisectoarea unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului.

Bisectoarele unui triunghi Semidreptele care împart unghiurile triunghiului în două părţi congruente.

Cele trei bisectoare sunt concurente, iar punctul lor de intersecţie este centrul cercului înscris triunghiului.



Bisectoarele unghiurilor formate de câte o latură cu prelungirea alteia se numesc *bisectoare exterioare.*

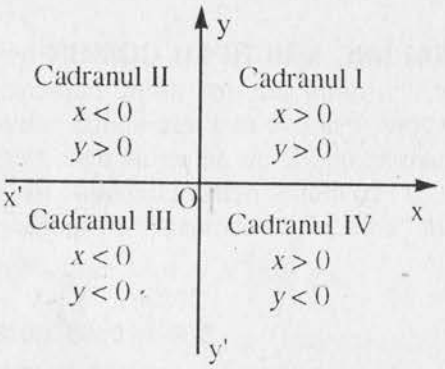
BOLYAI, Janoş (1802 - 1860), matematician maghiar din Transilvania. Este alături de **Lobacevski** şi **Riemann** unul dintre creatorii geometriei neeuclidene. A demonstrat că postulatul al 5-lea al geometriei lui Euclid (printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă şi numai una la acea dreaptă), poate fi înlocuit cu postulatul: „printr-un punct exterior unei drepte se pot duce două paralele".

BOLZANO, Bernhard (1781 - 1848), filozof, teolog şi matematician ceh. A adus contribuţii în algebră.

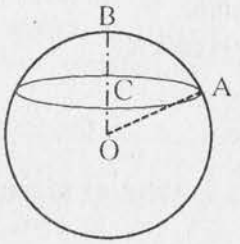
BOOLE, George (1815 - 1864), matematician englez. Este unul din întemeietorii logicii simbolice. A adus contribuţii în algebră.

BOURBAKI, pseudonim colectiv luat în 1933 de un grup de matematicieni francezi (H. Carton, C. Chevolley, J. Delsarte, J. Dieudonné, A. Weil). Lucrarea lor enciclopedică „Elemente de matematică" se ocupă de multe domenii ale matematicii moderne.

CADRAN Fiecare dintre cele patru zone în care este împărţit planul printr-un sistem de coordonate.



CALOTĂ SFERICĂ Fiecare din cele două părţi ale unei sfere, obţinute prin secţionarea ei cu un plan.



$OA = R$ (raza sferei).

$BC = h$ (înălţimea calotei).

$A = 2\pi Rh$ (aria calotei).

CATETĂ Fiecare dintre cele două laturi ale unghiului drept al unui triunghi dreptunghic.

CEBÎŞEV, Pafnuti Lvovici (1821 - 1894), matematician rus. A avut lucrări în domeniul teoriei numerelor (formula pentru aproximarea numărului de numere prime mai mici ca un număr dat).

CENTRU DE GREUTATE Punctul de intersecţie al medianelor triunghiului. El se află pe fiecare mediană la $\frac{2}{3}$ de vârf şi $\frac{1}{3}$ de bază.

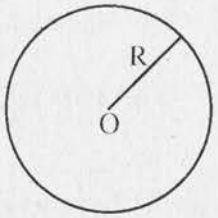
CEL MAI MIC MULTIPLU COMUN (prescurtare: **c.m.m.m.c.**), a două sau mai multe numere naturale, diferite de zero, este cel mai mic număr natural, diferit de zero, care se divide cu numerele date. Pentru a afla c.m.m.m.c. al mai multor numere înmulţim o singură dată factorii primi comuni şi necomuni cu exponenţii cei mai mari.

$$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$$
$$2268 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7$$

c.m.m.m.c. $[270, 2268] = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$

CERC Locul geometric al punctelor din plan, egal depărtate de un punct fix numit centru.

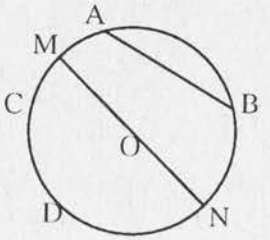
$C(O, R)$ este cercul de centru O şi rază R.



Trei puncte necolineare determină un cerc şi numai unul. Două cercuri se numesc congruente dacă au razele egale.

Segmentul care uneşte centrul cu un punct de pe cerc se numeşte rază.

Coarda este segmentul ce uneşte două punte de pe cerc. Coarda care conţine centrul cercului, se numeşte diametru.

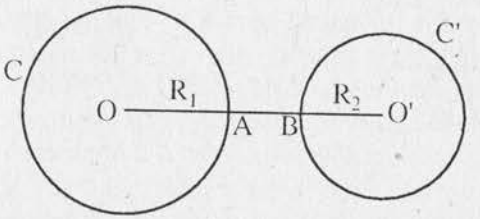


$[AB]$ coardă.
$\overset{\frown}{CD}$ arc.
$[MN]$ diametru.
$MN = 2R$.

Lungimea cercului: $L = 2\pi R$.

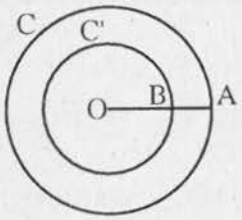
Măsurarea cercului — cea mai cunoscută lucrare a lui Arhimede, din care s-a păstrat doar un fragment format din trei propoziţii. În ea se demonstrează că:
1) aria cercului este egală cu aria unui triunghi dreptunghic cu înălţimea egală cu rază şi cu baza egală cu circumferinţa
2) aria cercului se raportează la pătratul construit pe diametrul său ca 11 la 14
3) raportul oricărei circumferinţe şi al diametrului ei este mai mic decât $3\frac{1}{7}$, dar mai mare decât $3\frac{10}{71}$.

Poziţia relativă a două cercuri



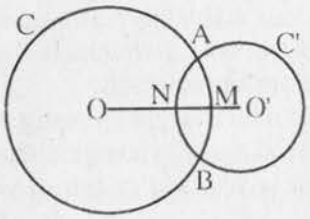
$C \cap C' = \emptyset$.
$OO' > R_1 + R_2$.

C şi C' sunt cercuri exterioare; ele nu au nici un punct comun.



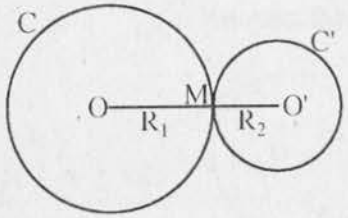
$C \cap C' = \emptyset$.
$OB = R_2$.
$OA = R_1$.
$OO' = O$.
$O \equiv O'$.

C şi C' sunt cercuri concentrice.



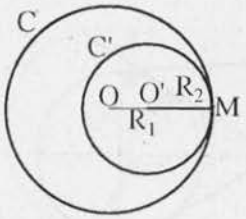
$C \cap C' = \{A, B\}$.
$OO' < R_1 + R_2$.

C şi C' sunt cercuri secante; ele au două puncte comune.



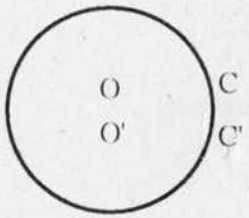
$C \cap C' = \{M\}$.
$OO' = R_1 + R_2$.

C şi C' sunt cercuri tangente exterioare; ele au un punct comun.



$C \cap C' = \{M\}$.
$OO' = R_1 - R_2$.

C şi C' sunt cercuri tangente interioare; ele au un punct comun.



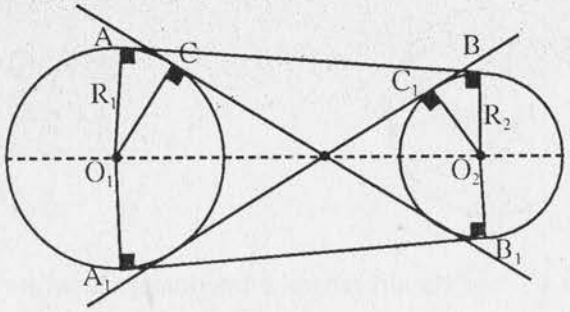
$C \cap C' = C = C'$.
$R_1 = R_2$.

C şi C' sunt cercuri confundate; ele au acelaşi centru şi aceeaşi rază.

Cercurile au toate punctele comune.

Concluzie: două cercuri au: 0, 1, 2 sau o infinitate de puncte comune.

În cazul a două *cercuri tangente*, punctul de tangenţă se găseşte pe linia centrelor. Unghiul făcut de două cercuri este unghiul format de tangentele lor în punctul de intersecţie. Două cercuri care fac un unghi drept se numesc cercuri ortogonale. Două cercuri care nu sunt unul interior altuia admit tangente comune. Pentru două cercuri exterioare unul altuia avem patru tangente comune, două de aceiaşi parte a liniei centrelor şi două care intersectează această linie. Din cauza simetriei ele sunt două câte două congruente.



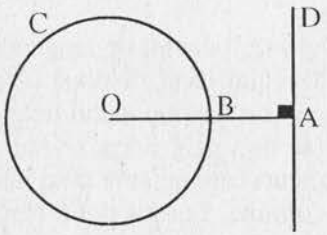
Tangenta comună exterioară are lungimea:

$$\sqrt{d^2-(R_1-R_2)^2}$$

Tangenta comună interioară are lungimea:

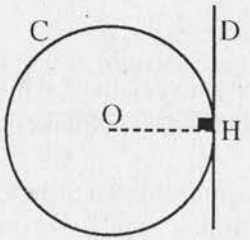
$$\sqrt{d^2-(R_1+R_2)^2}$$

Poziția unei drepte față de un cerc



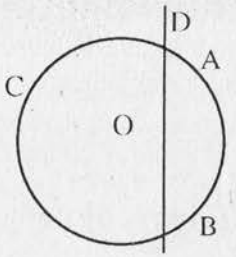
$C \cap C' = \emptyset$.
$(OA) \perp D$.
$OB = R$.
$R < OA$.

Dreapta D și cercul C sunt disjuncte. Nu au nici un punct comun.



$C \cap D = \{H\}$.
$D \perp (OH)$.
H este punctul de contact al lui C cu D.

Dreapta D este tangentă cercului C. Au un punct comun.

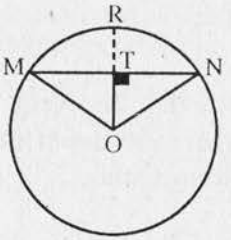


$C \cap D = \{A; B\}$.

Dreapta D este secanta cercului C. Au două puncte comune.

Concluzie: o dreaptă și un cerc au: 0, 1, sau 2 puncte comune

Perpendiculara din centrul unui cerc pe o coardă a aceluiași cerc, o împarte în două părți congruente.



$OM = ON = R$
$[OT] \perp [MN] \Rightarrow [MT] \equiv [TN]$

Diametrul perpendicular pe o coardă a aceluiași cerc, determină pe fiecare din arcele subîntinse de coardă, arce

congruente.

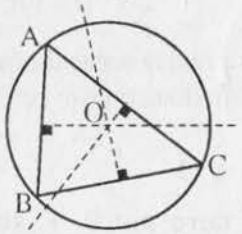
$$\overset{\frown}{MR} \equiv \overset{\frown}{RN}$$

În același cerc sau în cercuri congruente, dacă două coarde sunt congruente, atunci ele sunt egal depărtate de centrul cercului.

Cercul împarte planul în două regiuni una interioară, iar alta exterioară cercului. Regiunea interioară se numește *disc circular.*

CERCUL CIRCUMSCRIS TRIUNGHIULUI

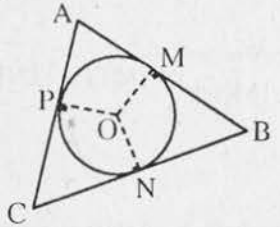
Cercul determinat de vârfurile triunghiului. Centrul lui se află la intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului.



$d(O, A) = d(O, B) = d(O, C).$

Punctul O se află la distanță egală de A, B și C.

CERCUL ÎNSCRIS TRIUNGHIULUI Cercul tangent la toate laturile triunghiului.



$d(O, M) = d(O, N) = d(O, P).$

O este egal depărtat de laturile triunghiului.

$[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$ sunt tangente la cercul cu centrul în O. Centrul cercului înscris se află la intersecția bisec-

toarelor triunghiului.

CEVA, Giovanni (1647 - 1734), matematician italian. Lucrări în domeniul geometriei.

CIFRELE ROMANE Principalele cifre folosite de romani:

I = I	L = 50
V = 5	C = 100
X = 10	D = 500

M = 1000

Numerele se obțin însumând aceste cifre:

II = 1 + 1 = 2 XX = 10 + 10 = 20

III = 1 + 1 + 1 = 3 XXX = 10 + 10 + 10 = 30

MC = 1000 + 100 = 1100

Dacă cifra care reprezintă o valoare mai mică este scrisă înaintea alteia, atunci valoarea ei se scade din valoarea cifrei următoare.

IV = 5 - 1 = 4 XC = 100 - 10 = 90

IX = 10 - 1 = 9 CM = 1000 - 100 = 900

XL = 50 - 10 = 40 CD = 500 - 100 = 400

Exemple de operații:

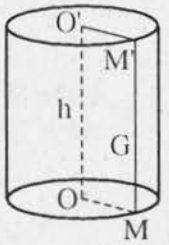
L + L = C 50 + 50 = 100

DCCC + C = CM 800 + 100 = 900

XXXIX + MDCCCL = MDCCCLXXXIX;

39 + 1850 = 1889

CILINDRU Corp mărginit de o suprafață cilindrică și de două plane paralele. Cilindrul circular este cilindru cu bazele cercuri. Cilindrul drept este cilindru cu generatoarele perpendiculare pe baze.



$OM = R$, (rază)

$OO' = h$, (înălțime)

$MM' = G$, (generatoare)

Cilindrul circular drept.

$A_l = 2\pi RG$ (aria laterală)

$A_t = 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(R + G)$ (aria totală)

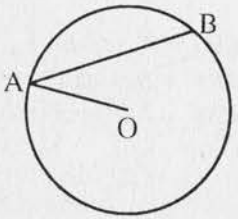
$V = \pi R^2 h$ (volumul)

CIURUL LUI ERATOSTENE Tabel care conţine toate numerele prime mai mici decât un număr natural dat:

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Numerele netăiate reprezintă numerele prime cuprinse între 1 şi 100.

COARDĂ Segmentul cu capetele în două puncte ale unui cerc.



$OA = R.$

$AB < 2R.$

Lungimea unei coarde ce nu conţine centrul cercului este mai mică decât $2R$.

CODOMENIU pentru $f: A \to B$; mulţimea B se numeşte codomeniu al funcţiei.

$f(A) = \{b \in B \mid$ există un $a \in A$ cu $f(a) = b\}$

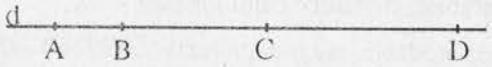
COEFICIENT Constantă care multiplică o mărime variabilă. Într-un termen sau într-o ecuaţie, coeficienţii sunt numerele care se află ca factori la variabile.

$f = 5x^3 - 2x^2 + 7x + 1$ coeficientul lui x^3 este 5

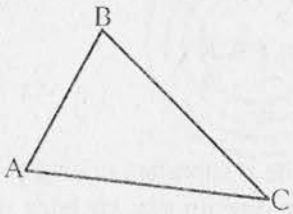
coeficientul lui x^2 este - 2

coeficientul lui x este 7

COLINEARITATE Punctele A, B, C, D . . . . . sunt colineare, dacă se află toate pe o dreaptă.

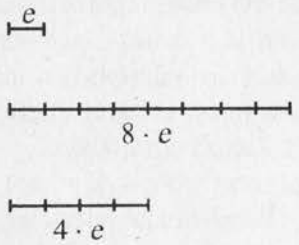


A, B, C, D sunt puncte colineare



A, B, C puncte necolineare

COMENSURABIL Două distanţe se numesc comensurabile dacă lungimile lor sunt multipli întregi ai unei lungimi unitare *e*. În caz contrar sunt incomensurabile.

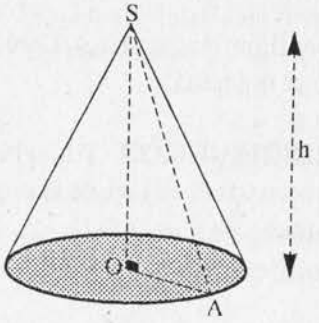


Câtul lungimilor a două segmente comensurabile este un număr raţional. Diagonala şi latura pătratului nu sunt comensurabile, deoarece câtul lor este $\sqrt{2}$.

COMUTATIVITATE Proprietate a unei relaţii sau operaţii matematice de a fi independentă de ordinea elementelor pe care le conţine.

$a + b = b + a$
$a \cdot b = b \cdot a$ $\quad \forall\, a, b \in R$

CON Corp mărginit de o suprafaţă conică şi de planul bazei. Conul circular este un con cu baza un cerc. Con circular drept este conul a cărui înălţime trece prin centrul cercului de bază.



$SO = h$ (înălţime)

$SA = G$ (generatoare)

$OA = R$ (rază)

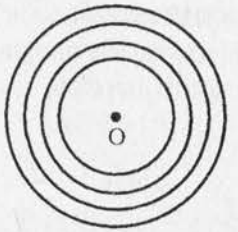
$G^2 = h^2 + R^2$

$A_l = \pi RG$ (aria laterală)

$A_t = \pi R(R + G)$ (aria totală)

$V_{con} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ (volumul)

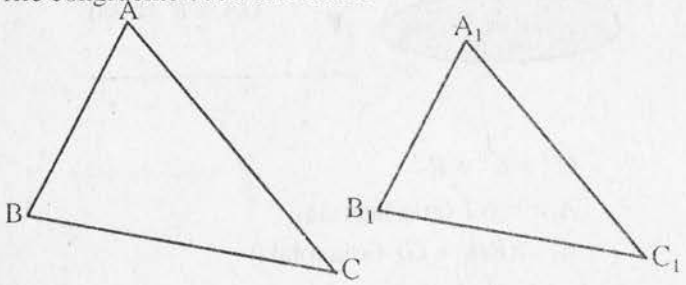
CONCENTRIC Numim cercuri concentrice sau sfere concentrice cercurile sau sferele care au acelaşi centru.



CONCLUZIE Ceea ce trebuie demostrat într-o teoremă sau problemă. Începe cu cuvântul „atunci".

CONGRUENT (Despre figuri geometrice) Care sunt egale sau care pot fi făcute să coincidă.

CONGRUENȚA TRIUNGHIURILOR Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt congruente dacă au laturile și unghiurile congruente două câte două.



$\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

$[AB] \equiv [A_1B_1]$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A_1$

$[AC] \equiv [A_1C_1]$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B_1$

$[BC] \equiv [B_1C_1]$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C_1$

Cazurile de congruență:

1. Două triunghiuri sunt congruente dacă au câte două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv congruente. (L.U.L.)

$[AB] \equiv [A_1B_1]$, $\hat{A} \equiv \hat{A}_1$

$[AC] \equiv [A_1C_1]$,

2. Două triunghiuri sunt congruente dacă au câte o latură și unghiurile alăturate ei respectiv congruente. (U.L.U.)

$[AB] \equiv [A_1B_1]$, $\hat{A} \equiv \hat{A}_1$, $\hat{B} \equiv \hat{B}_1$

3. Două triunghiuri sunt congruente dacă au laturile respectiv congruente (L. L. L).

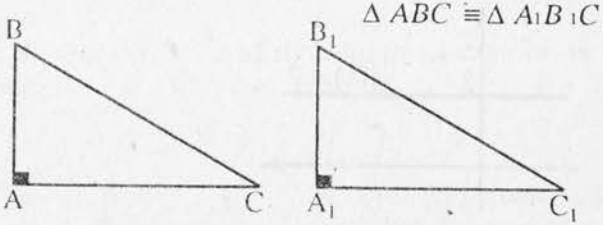
$[AB] \equiv [A_1B_1]$,

$[AC] \equiv [A_1C_1]$,

$[BC] \equiv [B_1C_1]$.

Cazurile de congruență ale triunghiurilor dreptunghice

$\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$



1. Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente când au catetele respectiv congruente (C. C)

$[AB] \equiv [A_1B_1]$

$[AC] \equiv [A_1C_1]$

2. Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au câte o catetă și unghiul ascuțit alăturat acesteia congruente (C. U)

$[AB] \equiv [A_1B_1]$

$\hat{B} \equiv \hat{B}_1$

3. Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au ipotenuzele congruente și câte un unghi ascuțit alăturat congruent. (I. U)

$[BC] \equiv [B_1C_1]$

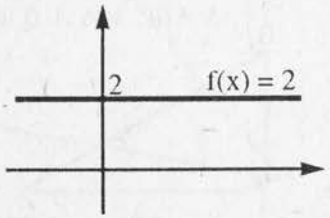
$\hat{B} \equiv \hat{B}_1$

4. Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă au ipotenuzele şi o catetă congruente (I, C).

$$[BC] \equiv [B_1C_1],$$
$$[AB] \equiv [A_1B_1].$$

CONSTANTĂ Funcţie care ia în toate punctele domeniului de definiţie aceeaşi valoare.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $f(x) = 2$ este o funcţie constantă.



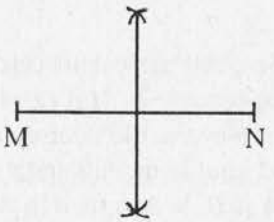
Numerele fixe care apar în ecuaţii se numesc constante. În ecuaţia de gradul I:

$ax + b = 0$; a şi b se consideră constante iar x este variabila

CONSTRUCŢII GEOMETRICE Construirea figurilor plane cu diferite instrumente, cel mai des cu rigla şi compasul. Pentru trasarea perpendicularelor sau paralelelor se admite şi folosirea echerului. Tipurile de paşi folosiţi la orice construcţie:

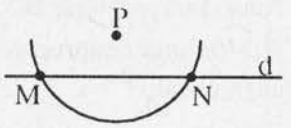
- trasarea unei drepte prin două puncte,
- aflarea intersecţiei a două drepte,
- trasarea unui cerc de rază dată şi cu centrul într-un punct dat,
- aflarea punctelor de intersecţie ale unui cerc cu un alt cerc, sau ale unui cerc cu o dreaptă.

1) Perpendiculara pe mijlocul unui segment de dreaptă.



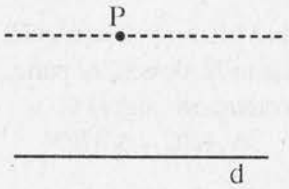
Se construiesc cercurile cu centrele în punctele M şi N cu raze egale şi mai mari decât jumătatea segmentului MN. Perpendiculara căutată va trece prin punctele de intersecţie ale celor două cercuri.

2) Perpendiculara dusă dintr-un punct exterior, pe o dreaptă.



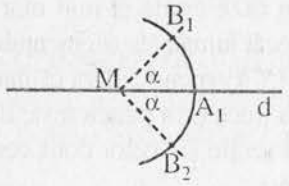
Se construieşte un cerc cu centrul în P şi cu raza convenabil aleasă, aşa ca să intersecteze dreapta d în două puncte M şi N. Revine cazul 1.

3) Paralela dusă-printr-un punct P la o dreaptă dată.

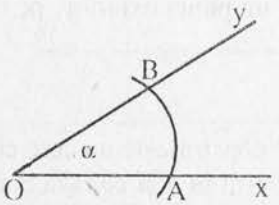


Se fixează o catetă a echerului pe dreapta d şi rigla pe ipotenuza echerului. Deplasând echerul până când cateta care a fost iniţial pe dreapta d. trece prin P. paralela căutată este de-a lungul acestei catete.

4) Dreapta care trece printr-un punct al altei drepte şi face cu aceasta un unghi dat.

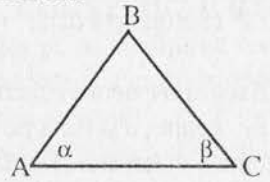


Se construiesc două cercuri cu centrele în M şi O, şi de raze egale. Ele intersectează laturile unghiului dat în A şi B, şi dreapta d în A_1. Se construieşte cercul cu centrul în A_1 şi de rază AB. Acesta intersectează primul cerc în două puncte B_1 şi B_2.



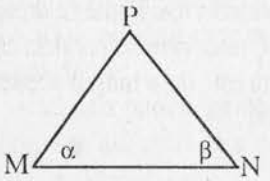
Amândouă unghiurile $B_1\widehat{M}A_1$ $A_1\widehat{M}B_2$ sunt congruente cu unghiul dat.

5). Triunghiul asemenea cu un triunghi dat, aşezat pe un segment dat.

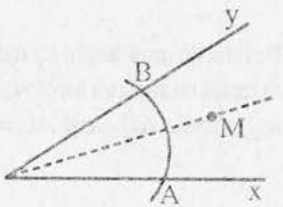


În M se construieşte unghiul A. iar în N, de aceeaşi parte, se construieşte unghiul C.

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, MPN$

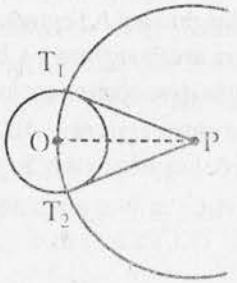


6). Împărţirea unui unghi în două părţi congruente.



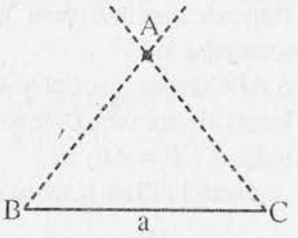
Cu centrul în O se construieşte un cerc, cu rază oare care, care taie laturile unghiului în punctele A şi B. Cercurile cu centrele în A şi B şi cu aceeaşi rază, se vor intersecta pe bisectoarea unghiului.

7). Tangentele duse dintr-un punct dat la un cerc dat.



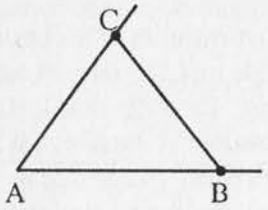
Cercul cu centrul în punctul dat P şi cu diametrul PO va intersecta cercul dat în punctele de tangenţă T_1 şi T_2.

8). Triunghiul ABC când se cunosc latura a şi unghiurile alăturate $\hat{B}$ şi $\hat{C}$.



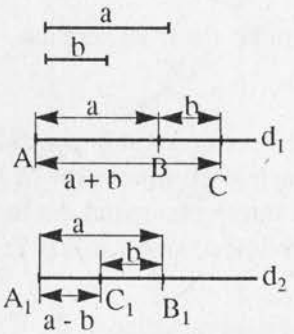
Prin capetele segmentului BC de lungimea a se construiesc semidrepte care fac cu segmentul, unghiurile $\hat{B}$ şi $\hat{C}$. La intersecţia lor se află punctul A.

9). Triunghiul ABC când se cunosc latura b şi c şi unghiul $\hat{A}$.



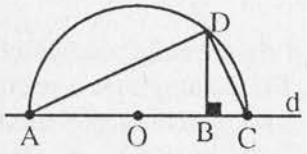
Pe laturile unui unghi cu măsura egală cu măsura lui $\hat{A}$ se iau segmentele $AB = c$ şi $AC = b$.

10). Un segment de lungime egală cu suma sau diferenţa lungimilor a două segmente.



Pe dreapta d_1 se construiesc în acelaşi sens segmentele AB şi BC de lungimi a şi b. Segmentul AC va avea lungimea $a + b$.
Pe dreapta d_2 se construiesc în sensuri contrare segmentele A_1B_1 şi B_1C_1 de lungimea a şi b. Segmentul A_1C_1 va avea lungimea $a - b$.

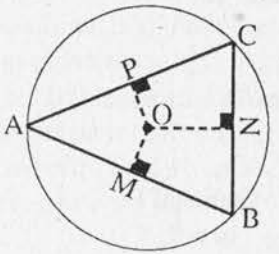
11). Media geometrică a două segmente de lungimi a şi b.



Se consideră pe dreapta **d** segmentele AB şi BC de lungimi a şi b (în acelaşi sens). Se construieşte cercul cu diametrul AC. Perpendiculara în B pe AC taie semicercul în D.
ΔADC dreptunghic ($\sphericalangle D$ este înscris în semicerc). DB este înălţime $DB^2 = AB \cdot BC$.
Segmentul DB are lungimea

$$\sqrt{ab}$$

12). Cercul care trece prin trei puncte necolineare.



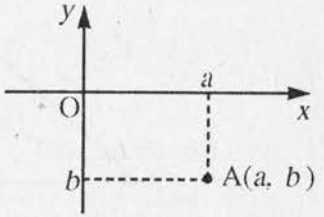
Centrul cercului se află la intersecţia mediatoarelor triunghiului ABC.

CEL MAI MARE DIVIZOR COMUN (prescurtare: **c. m. m. d. c**) a două sau mai multe numere naturale, nu toate nule, este cel mai mare număr natural care divide numerele date. Pentru a afla **c.m.m.d.c.** al mai multor numere, înmulţim o singură dată factorii primi comuni cu exponenţii cei mai mici.

Ex.: $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$
$2268 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7$
c.m.m.d.c $(270, 2268) = 2 \cdot 3^3 = 54$

COORDONATE ÎN PLAN Două drepte perpendiculare înzestrate ca axe, având punctul de intersecţie ca origine, formează un sistem de axe rectangulare sau sistem de coordonate în plan. Orice pereche (a, b), cu $a \in \mathbb{R}$ şi $b \in \mathbb{R}$ poate fi reprezentată ca un punct A în plan.

$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$A(a, b)$



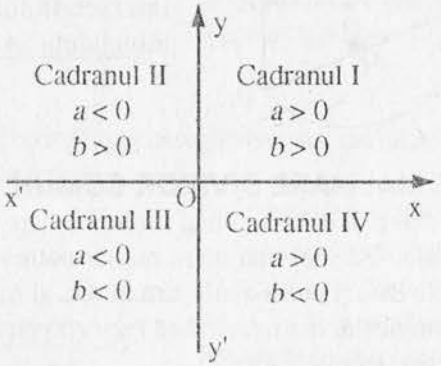
a se numeşte abscisa punctului A.

b se numeşte ordonata punctului A.

Ox este axa absciselor.

Oy este axa ordonatelor

Sistemul de axe împarte planul în 4 cadrane.



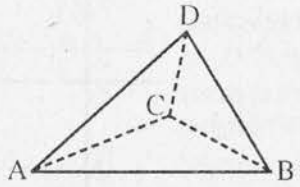
Punctele de pe axa Ox au ordonata zero $A_1(a, 0)$.

Punctele de pe axa Oy au abscisa zero $A_2(0, b)$.

Toate punctele care au aceeaşi abscisă se găsesc pe o paralelă la Oy.

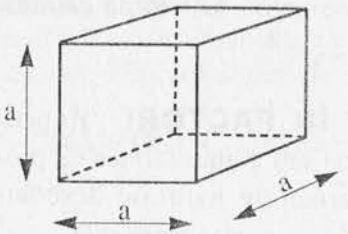
Toate punctele care au aceeaşi ordonată se găsesc pe o paralelă la Ox.

COPLANAR Se numesc coplanare puncte aflate toate într-un plan. Orice trei puncte în spaţiu sunt coplanare.



CORP GEOMETRIC O submulţime spaţială neântinsă limitată din toate părţile de un număr finit de suprafeţe plane sau curbe. Totalitatea suprafeţelor de limitare reprezintă aria, iar partea de spaţiu închisă complet de aceasta se numeşte interiorul corpului. Un corp realizat prin rotirea unei suprafeţe plane în jurul unei drepte se numeşte *corp de rotaţie*.

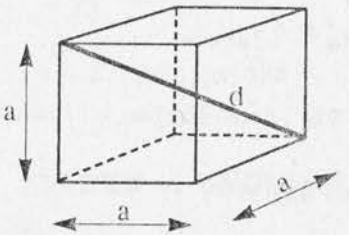
CUB Paralelipipedul dreptunghic cu toate muchiile congruente.



$A_l = 4a^2$ (aria laterală)

$A_t = 6a^2$ (aria totală)

$V = a^3$ (volumul)



$d = a \cdot \sqrt{3}$

(diagonala unui cub).

D'ALEMBERT, Jean le Rond (1717 - 1783), savant francez. Autorul articolelor de matematică din Enciclopedia franceză. A formulat teorema fundamentală a algebrei.

DE MORGAN, Augustus (1806 - 1871), logician şi matematician englez. Unul dintre întemeietorii logicii simbolice.

DESCARTES, René (1596 - 1650), filozof, matematician şi fizician francez. În geometrie introduce sistemul său de coordonate numit sistem de coordonate carteziene.

DESCOMPUNERE ÎN FACTORI Reprezentarea unui număr natural sau a unui termen ca produs de factori. Pentru numerele naturale descompunerea în factori primi este de mare importanţă.

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$y^4 + 6y^2 + 9 = (y^2 + 3)^2$$

$$x^4y^2 - u^2v^4 = (x^2y - uv^2)(x^2y + uv^2)$$

$$35a^2x + 15bx^2 - 28a^3 - 12abx =$$

$$= 5x(7a^2 + 3bx) - 4a(7a^2 + 3bx) =$$

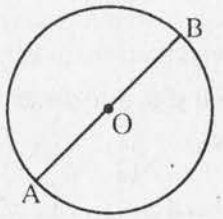
$$= (7a^2 + 3bx)(5x - 4a)$$

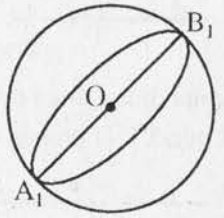
DIAGONALĂ (a unui poligon) Orice segment de dreaptă care uneşte două vârfuri care nu sunt învecinate. Un poligon cu n laturi posedă $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale, deoarece fiecare vârf poate fi unit cu alte $(n - 3)$ vârfuri prin diagonale.

DIAGRAMA EULER — VENN **v. MULŢIMI**

DIAMETRAL OPUS Două puncte A şi B de pe un cerc sau suprafaţă sferică sunt diametral opuse dacă distanţa AB este un diametru, deci dacă ea conţine şi centrul cercului, respectiv sferei.

DIAMETRU Coarda care trece prin centrul unui cerc (respectiv elipsă).





AB diametru cercului A_1B_1 diametru elipsă

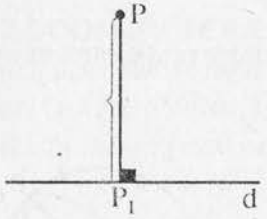
Toate diametrele unui cerc au aceeaşi lungime.

DIEDRU **v. UNGHI DIEDRU**

DIOFANT (325 - 409), matematician grec din Alexandria. În lucrarea „Aritmetica" s-a ocupat de algebră şi teoria numerelor. A studiat ecuaţii cu soluţii în numere întregi.

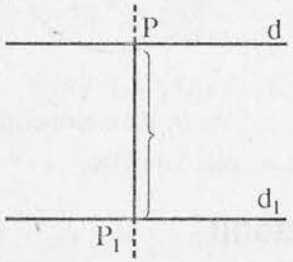
DIRICHLET, Peter Gustav (1805 - 1859), matematician german. Contribuţii în teoria numerelor.

DISTANŢĂ Interval care desparte două puncte; depărtare. Distanţa între două puncte în plan sau spaţiu este lungimea segmentului determinat de cele două puncte. Distanţa unui punct P la o dreaptă d (în plan sau în spaţiu) este depărtarea lui P de punctul P_1, piciorul perpendicularei din P pe d.



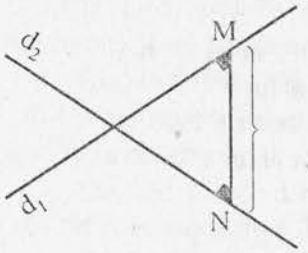
$PP_1 \perp d$

Distanţa dintre două drepte paralele d şi d_1 este distanţa unui punct P al dreptei d la dreapta d_1.



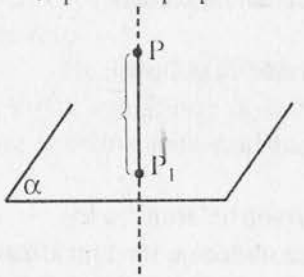
$d \parallel d_1$
$P \in d$
$P_1 \in d$
$PP_1 \perp d_1$

Distanţa dintre două drepte oarecare în spaţiu, este egală cu lungimea segmentului perpendicular pe ambele drepte.



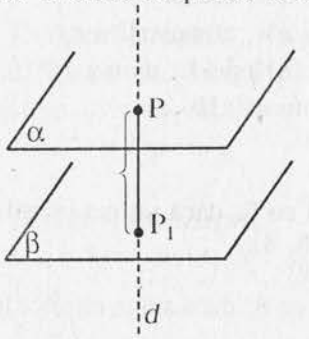
$M \in d_1$ $\quad MN \perp d_1$
$N \in d_2$ $\quad MN \perp d_2$

Distanţa unui punct P faţă de un plan α, este distanţa lui P la P_1, piciorul perpendicularei din P la planul α.



$P_1 \in \alpha$
$PP_1 \perp \alpha$

Distanţa dintre două plane paralele este distanţa unui punct al unuia din plane, la celălalt plan.



$\alpha \parallel \beta$
$d \perp \alpha$
$d \perp \beta$
$P \in d$
$P_1 \in d$
$P \in \alpha$
$P_1 \in \beta$

DIVIZIBILITATE Un număr natural a este divizibil cu un număr natural b, dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Se citeşte: "a se divide cu b", notat $a \vdots b$.
"a este multiplu al lui b".
"b divide pe a", notat $b \mid a$.
"b este un divizor al lui a".

Proprietăţi:

1) orice număr natural este divizibil cu 1.
$1 \mid a, \ \forall \ a \in \mathbb{N}$

2) zero este divizibil cu orice număr natural.
$a \mid 0, \ \forall \ a \in \mathbb{N}$

3) orice număr natural se divide cu el însuşi.
$a \mid a, \ \forall \ a \in \mathbb{N}$

4) Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Dacă $a \mid b$ şi $b \mid a$, atunci $a = b$

5) Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dacă $a \mid b$ şi $b \mid c$, atunci $a \mid c$

6) Dacă un număr natural se divide cu un număr natural, atunci primul se divide cu toţi divizorii celui de-al doilea.

7) Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a \mid b$ şi $a \mid c$, atunci $a \mid b + c$

8) Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a \mid b$ şi $a \nmid c$, atunci $a \nmid b + c$

9) Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $b \geq c$, $a \mid b$ şi $a \mid c$, atunci $a \mid b - c$

10) Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ şi $a \mid b$, atunci $a \mid b \cdot c$

Criterii de divizibilitate

1) Un număr este divizibil cu 2, dacă ultima lui cifră este un număr par; $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Ex.: 62, 24, 100, 4538, ...

2) Un număr este divizibil cu 3, dacă suma cifrelor lui este un număr divizibil cu 3.

Ex.: 33, 69, 111, 252, ...

3) Un număr este divizibil cu 4, dacă ultimele două cifre formează un număr natural divizibil cu 4.

Ex.: 244, 396, 2532, ...

4) Un număr este divizibil cu 5, dacă ultima cifră este zero sau se divide cu 5.

Ex.: 65, 70, 95, 1325, 1400, ...

5) Un număr este divizibil cu 9, dacă suma cifrelor lui este un număr divizibil cu 9.

Ex.: 81, 180, 2610, 2313, ...

6) Un număr este divizibil cu 10, dacă ultima cifră este zero.

Ex.: 40, 700, 9000, ...

7) Un număr este divizibil cu 25, dacă ultimele două cifre sunt două zerouri, sau formează un număr divizibil cu 25.

Ex.: 625, 475, 9050, 14250, ...

8) Un număr este divizibil cu 100, dacă ultimele două cifre sunt doi de zero.

Ex.: 500, 700, 9000, 1530000, ...

Divizori proprii:

Divizorii unui număr $a \in \mathbb{N}$ care nu sunt improprii se numesc divizori proprii.

$b \mid a, \ b \neq 1$ şi $b \neq a$

Divizori improprii:

$\forall \ a \in \mathbb{N}$ se divide cu 1 şi cu a

$1 \mid a$

$a \mid a$

1 şi a se numesc divizori improprii.

DREAPTĂ Element de bază al geometriei plane şi în spaţiu ale cărei proprietăţi sunt stabilite prin axiome.

1) O dreaptă este unic determinată de două puncte.

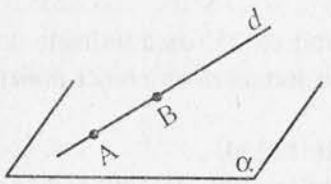
2) Dacă trei puncte se află pe o dreaptă, numai despre unul se poate spune că se află între celelalte două.

3) O dreaptă este împărţită de un punct în două semidrepte.

4) O dreaptă este nelimitată.

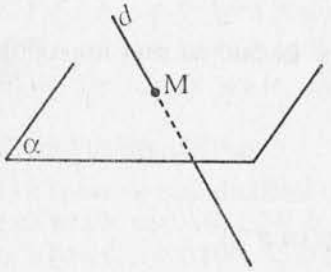
5) O dreaptă împarte un plan în două semiplane.

Poziţiile unei drepte faţă de un plan:



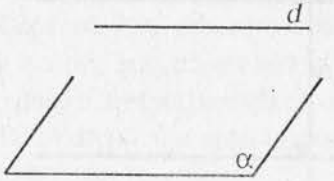
$A \in d,\ A \in \alpha$
$B \in d,\ B \in \alpha$ $\Rightarrow d \subset \alpha$

Dreapta conţinută într-un plan.



$d \cap \alpha = \{M\}$

Dreapta înţeapă planul.

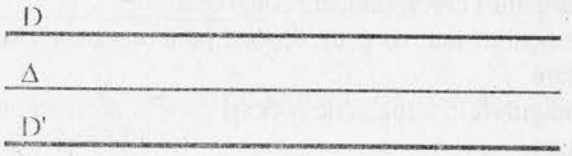


$d \parallel \alpha$
$d \cap \alpha = \varnothing$

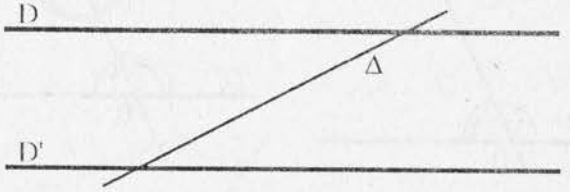
Dreaptă paralelă cu planul.

Drepte paralele Două drepte D şi D' conţinute în acelaşi plan, care nu au nici un punct comun.

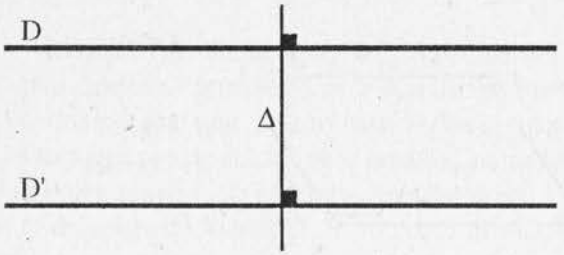
Axioma paralelelor: printr-un punct dat, exterior unei drepte date, există o singură paralelă la dreapta dată.



$D \mathbin{/\!/} D'$
$\Delta \mathbin{/\!/} D$ } atunci $\Delta \mathbin{/\!/} D'$



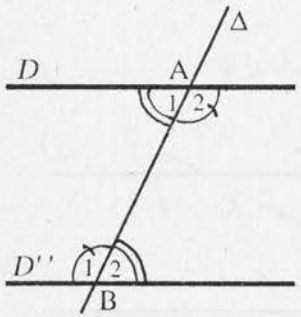
$D \mathbin{/\!/} D'$
Δ secantă pentru D } atunci Δ este secantă şi pentru D'

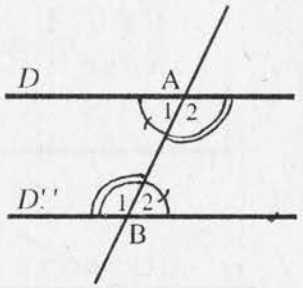


$D \parallel D'$
$\Delta \perp D$ } atunci $\Delta \perp D'$

Dacă două drepte sunt paralele tăiate de o secantă atunci se formează:

- unghiuri alterne externe congruente
- unghiuri corespondente congruente
- unghiuri interne şi de aceeaşi parte a secantei suplementare
- unghiuri externe şi de aceeaşi parte a secantei suplementare





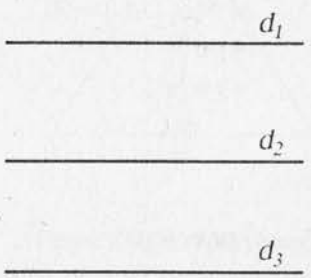
$\hat{A}_1 \equiv \hat{B}_2$ $\quad m(\hat{A}_1) + m(\hat{B}_1) = 180^\circ$

$\hat{A}_2 \equiv \hat{B}_1$ $\quad m(\hat{A}_2) + m(\hat{B}_2) = 180^\circ$

Paralelism în spaţiu.

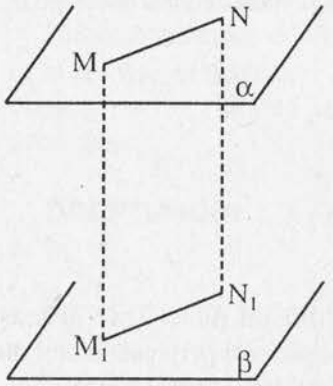
Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α, oricare plan care conţine această dreaptă şi intersectează planul α, o face după o dreaptă paralelă cu d.

Două drepte din spaţiu paralele cu a treia, sunt paralele între ele.



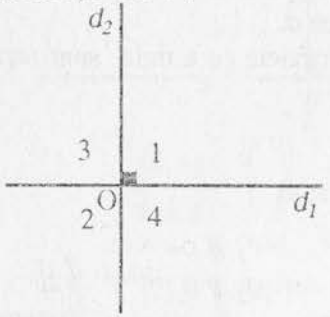
$d_1 \parallel d_2$
$d_2 \parallel d_3$ $\Rightarrow d_1 \parallel d_3$

Două plane paralele determină pe două drepte paralele segmente congruente.



$\alpha \parallel \beta$
$[MN] \parallel [M_1N_1]$ } $\Rightarrow [MN] \equiv [M_1N_1]$

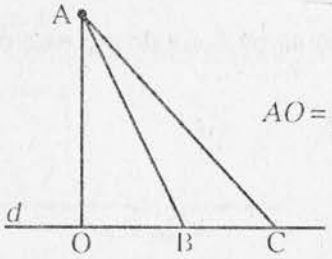
Drepte perpendiculare Două drepte concurente care au unul din unghiurile formate în jurul punctului de intersecție de 90°.



$d_1 \perp d_2$
$m(\sphericalangle d_1 O d_2) = 90^\circ$
$\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$
$\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 4$

Drepte perpendiculare

$m(\sphericalangle 1) = m(\sphericalangle 2) = m(\sphericalangle 3) = m(\sphericalangle 4) = 90^\circ$



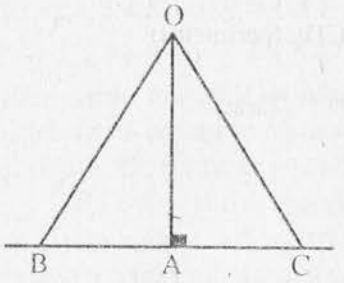
$m(\sphericalangle AOB) = 90^\circ$
AO = perpendiculara din A pe d
AB = oblică
$AO < AB$

Perpendiculară și oblică

Dintre două oblice duse dintr-un punct spre aceeași dreaptă, cea mai depărtată de piciorul perpendicularei din același punct pe aceeași dreaptă este cea mai lungă.

$AC > AB$
$OB < OC$

Două oblice din același punct pe aceeași dreaptă cu picioarele egal depărtate de piciorul perpendicularei sunt congruente.



$[OB] \equiv [OC]$
$[AB] \equiv [AC]$

Perpendicularitate în spațiu.

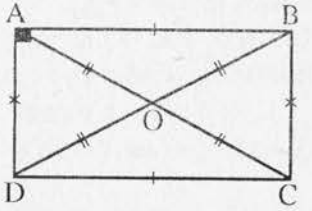
O dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă a planului.

Dintr-un punct exterior unui plan, se poate duce doar o perpendiculară pe acel plan.

Două drepte perpendiculare pe un plan sunt paralele.

Dacă considerăm două drepte d_1 și d_2 necoplanare, există o dreaptă unică care le intersectează și este perpendiculară pe ele, numită perpendiculara comună a celor două drepte.

DREPTUNGHI Un paralelogram care are un unghi drept.



$[AB] \equiv [CD]$
$[AD] \equiv [BC]$
$[AC] \equiv [BD]$
$[AO] \equiv [OC]$
$[BO] \equiv [OD]$

Dreptunghiul are toate unghiurile congruente, deci toate sunt unghiuri drepte. Diagonalele unui dreptunghi sunt congruente.

$P = 2(AB + CD)$ (perimetru)

$\mathcal{A} = AB \cdot CD$ (arie)

ECUAŢIE O propoziţie cu o variabilă în care există simbolul "egal". Mulţimea de adevăr este totalitatea elementelor care conduc la propoziţii adevărate. Mulţimea soluţiilor este mulţimea de adevăr.

Ex.: $x + 3 = 5 \Rightarrow S = \{ 2 \}$

$z - 3 = 2 \Rightarrow S = \{ 5 \}$

Elementele mulţimii de adevăr se numesc rădăcinile ecuaţiei. Două ecuaţii se numesc echivalente dacă au aceleaşi soluţii. O ecuaţie se notează:

$\{x \mid x \in D$ şi $f(x) = g(x) \}$

unde D este mulţimea de adevăr. A transforma o ecuaţie, înseamnă a o înlocui cu o altă ecuaţie obţinută din prima, făcând diverse calcule algebrice. O transformare este valabilă dacă nu se pierde nici o soluţie a ecuaţiei iniţiale şi nu se introduce nici o soluţie străină.

În interiorul lui D este posibil:

- să se efectueze orice operaţie de adunare, scădere, înmulţire, împărţire, în interiorul fiecărui membru;
- să se adune sau să se scadă celor doi membri orice expresie algebrică definită pe D;
- să se treacă un termen dintr-un membru în altul, schimbându-i semnul;
- să se înmulţească cei doi membri printr-o expresie definită pe D şi nenulă.

Transformarea prin adunare:

$\{x \mid x \in D$ şi $f(x) = g(x) \}$ are aceeaşi mulţime de adevăr cu $\{x \mid x \in D$ şi $f(x) + A(x) = g(x) + A(x) \}$, unde $A(x)$ este o expresie algebrică definită pe D.

Pentru $x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 6x = 7 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 7 + 9 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 16 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ \text{şi} \\ x+3=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{şi} \\ x=-7 \end{cases}$$

Trecerea dintr-un membru în altul:

$\{x \mid x \in D$ şi $f(x) = g_1(x) + g_2(x)\}$ are aceeaşi mulţime de adevăr cu $\{x \mid x \in D$ şi $f(x) - g_2(x) = g_1(x)\}$.

Pentru $x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 1 = 4 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ \text{şi} \\ x-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \text{şi} \\ x=-1 \end{cases}$$

Transformarea prin înmulţire:

$\{x \mid x \in D$ şi $f(x) = g(x)\}$ are aceeaşi mulţime de adevăr cu $\{x \mid x \in D$ şi $f(x) \cdot B(x) = g(x) \cdot B(x)\}$, unde $B(x)$ este o expresie algebrică definită pe D şi care nu ia niciodată valoarea zero.

Pentru $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 9x + 2 = 4x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x - 4x = 6 - 2 \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$$

Pentru $x \in \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{12}{x^2-9} \Leftrightarrow (x+3)^2 - (x-3)^2 = 12 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x+3+x-3)(x+3-x+3) = 12 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x \cdot 6 = 12 \Leftrightarrow 12x = 12 \Leftrightarrow x = 1$

ECUAŢIA DE GRADUL I O ecuaţie de tipul $ax + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R}$ se numeşte necunoscută.

$a, b \in \mathbb{R}$ sunt coeficienţii ecuaţiei.

A rezolva ecuaţia înseamnă a determina soluţiile ei.

$x = -\frac{b}{a}$ este soluţia ecuaţiei de gradul I, dacă $a \neq 0$.

Dacă $a = 0$ şi $b \neq 0$, ecuaţia nu are soluţii.

Dacă $a = b = 0$, ecuaţia este nedeterminată; (are o infinitate de soluţii).

1) $(m-1)x = m^2 - 1$

a) $m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

$0 \cdot x = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ecuaţia este nedeterminată.

b) $m \neq 1 \Rightarrow x = \frac{(m-1)(m+1)}{m-1} \Rightarrow x = m+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ecuaţia are o singură soluţie.

2) $2 - \frac{x}{x-1} = \frac{2x-3}{x-1}$

$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$2(x-1) - x = 2x - 3$

$2x - 2 - x = 2x - 3$

$-x = -1$

$x = 1$ nu poate fi soluţie $\Rightarrow$ ecuaţia nu are soluţii (ecuaţie imposibilă).

Ecuații de gradul I cu două necunoscute

I $ax + by + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a \neq 0,$$
$$b \neq 0.$$

a, b se numesc coeficienții ecuației.

x, y se numesc necunoscute.

c este termenul liber.

O ecuație de gradul I cu două necunoscute are mai multe soluții. Punctele din plan care au drept coordonate soluțiile ecuației sunt așezate pe o dreaptă numită dreapta soluțiilor.

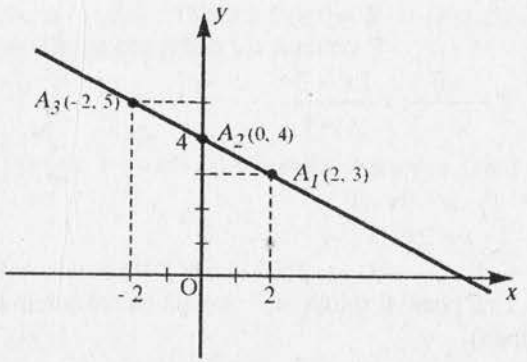
Ex.: $2x + 4y - 16 = 0$

$$y = \frac{16 - 2x}{4}$$

$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \frac{16-4}{4} = 3$; $A_1(2, 3)$

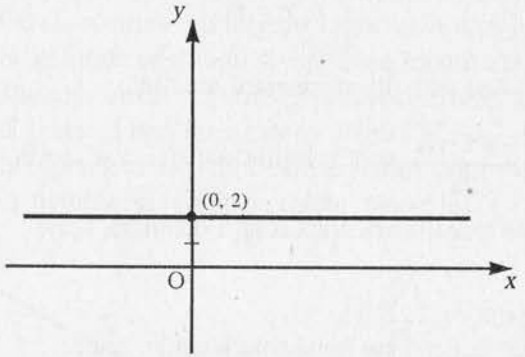
$x_2 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{16-0}{4} = 4$; $A_2(0, 4)$

$x_3 = -2 \Rightarrow y_3 = \frac{16+4}{4} = 5$; $A_3(-2, 5)$



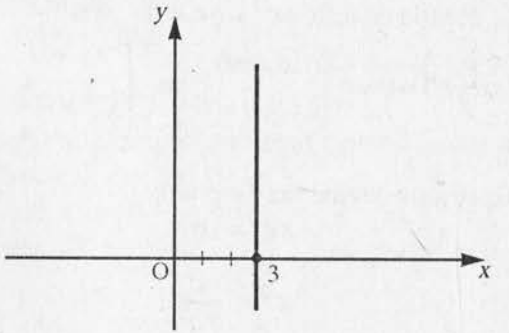
II Cazul particular $a = 0 \Rightarrow by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$

Ex.: $3y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2$



III Cazul particular $b = 0 \Rightarrow ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$

Ex.: $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$



Dacă la o ecuație trecem termenii dintr-o parte în alta cu semn schimbat sau înmulțim (împărțim) ambii termeni cu același număr real diferit de zero, vom obține o ecuație echivalentă. Ecuațiile echivalente au aceleași drepte ale soluțiilor.

ECUAȚIA DE GRADUL al II-lea

1) $ax^2+bx+c=0$, $x \in \mathbb{R}$,

$a, b, c \in \mathbb{R}$,

$a \neq 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ este discriminantul ecuației.

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ sunt soluțiile ecuației când $a \neq 0$.

$\Delta > 0 \Rightarrow$ ecuația are două soluții distincte, reale.

$x_1 \neq x_2$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$\Delta = 0 \Rightarrow$ ecuația are două soluții egale, reale.

$x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$.

$\Delta < 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții reale.

$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$.

2) $c = 0$, ecuația devine: $ax^2 + bx = 0$.

$$x(ax+b)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

3) $b = 0$, ecuația devine: $ax^2 + c = 0$,

$ax^2 = -c$

$x^2 = -\dfrac{c}{a}$

$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ cu condiția $-\dfrac{c}{a} \geq 0$

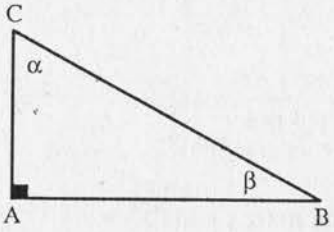
ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

Sinusul unui unghi este raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea ipotenuzei.

Cosinusul unui unghi este raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea ipotenuzei.

Tangenta unui unghi este raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea catetei alăturate.

Cotangenta unui unghi este raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea catetei opuse lui.



$$\sin\alpha = \frac{AB}{BC}; \quad \sin\beta = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{BC}; \quad \cos\beta = \frac{AB}{BC}$$

Consecință:

$\sin\alpha = \cos\beta$

dacă $m(\alpha) + m(\beta) = 90^\circ$

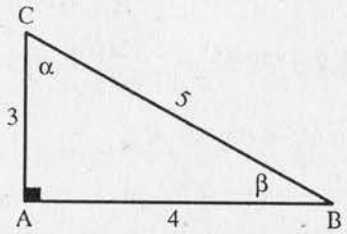
$\cos\alpha = \sin\beta$

Sinusul unui unghi este egal cu cosinusul unghiului complementar.

$\sin 0^\circ = 0$ $\qquad$ $\cos 0^\circ = 1$

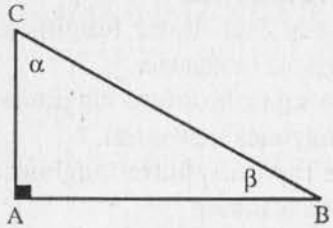
$\sin 90^\circ = 1$ $\qquad$ $\cos 90^\circ = 0$

Ex.:



$$\sin\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin\beta = \frac{3}{5} \qquad \cos\beta = \frac{4}{5}$$



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{AC}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{AB}{AC}$$

Consecință:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$$

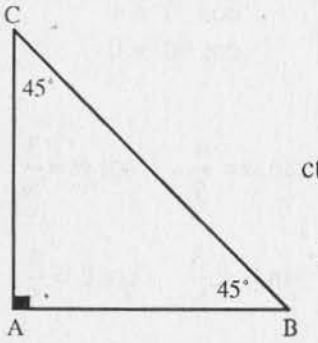
dacă $m(\alpha) + m(\beta) = 90^\circ$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$$

Tangenta unui unghi este egală cu cotangenta unghiului complementar.

Ex.:

Cazul triunghiului dreptunghic isoscel: $AB = AC = 2$ cm



$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}45^\circ = \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\operatorname{tg}45^\circ = \operatorname{ctg}45^\circ = 1$$

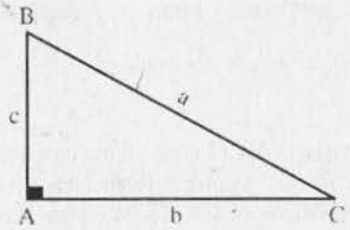
Măsura în grade	30°	45°	60°
Măsura în radiani	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\Pi}{4}$	$\frac{\Pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$



$$\sin\hat{B} = \frac{b}{a} \qquad b = a\sin\hat{B}$$

$$\Rightarrow$$

$$\cos\hat{B} = \frac{c}{a} \qquad c = a\cos\hat{B}$$

Într-un triunghi dreptunghic, o catetă este egală cu produsul dintre ipotenuza și sinusul unghiului opus sau cosinusul unghiului alăturat.

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c} \qquad b = c \operatorname{tg} \hat{B}$$

$$\Rightarrow$$

$$\operatorname{ctg} \hat{B} = \frac{c}{b} \qquad c = b \operatorname{ctg} \hat{B}$$

Într-un triunghi dreptunghic, o catetă este egală cu produsul dintre cealaltă catetă şi tangenta unghiului opus sau cotangenta unghiului alăturat.

EMMANUEL, DAVID (1854 - 1941), matematician român. Profesor la Universitatea din Bucureşti. Membru de onoare al Academiei Române. Este unul din întemeietorii şcolii româneşti de matematică, printre elevii săi fiind Gheorghe Ţiţeica şi Traian Lalescu.

ERATOSTENE (c. 275 - 195 î. Hr.), matematician, astronom şi filozof grec din Alexandria. Contribuţii la teoria numerelor prin „Ciurul lui Eratostene".

EUCLID (Eukleides) (sec. III î. Hr.), matematician grec din Alexandria. Contribuţii în domeniul aritmeticii (algoritmul lui Euclid). A făcut prima expunere completă a fundamentelor geometriei.

„Elementele" lui Euclid sunt formate din 13 cărţi, dintre care opt de geometrie pură şi cinci în care tratează geometric problemele fundamentale din teoria proporţiilor şi din aritmetică. Cartea I începe cu 23 definiţii referitoare la: punct, dreaptă, plan, unghiul a două drepte, cerc, poligoane.

D_1 - Punctul este ceea ce nu are nici o parte.

D_2 - Linia este o lungime fără lăţime.

D_3 - Extremităţile unei linii sunt puncte.

D_4 - Dreapta este linia situată la fel faţă de toate punctele ei.

D_5 - Suprafaţa este ceea ce are numai lungime şi lăţime.

D_6 - Extremităţile unei suprafeţe sunt linii.

D_7 - Planul este suprafaţa situată la fel faţă de toate dreptele conţinute în el.

D_{11} - Unghiul obtuz este acela care este mai mare decât unghiul drept.

D_{23} - Paralele sunt drepte care fiind situate în acelaşi plan şi fiind prelungite în mod indefinit de ambele părţi, nu se întâlnesc în nici o parte.

După definiţii în carte urmează cinci postulate:

P_1 - Două puncte determină o dreaptă.

P_2 - Orice dreaptă poate fi prelungită indefinit.

P_3 - Din orice centru se poate duce un cerc cu orice rază vrem.

P_4 - Toate unghiurile drepte sunt egale între ele.

P_5 - Când o secantă taie alte două drepte şi formează cu ele unghiuri interne şi aşezate de aceiaşi parte a secantei a căror sumă este mai mică decât două unghiuri drepte, dreptele se vor intersecta de acea parte a secantei unde această sumă este mai mică decât două unghiuri drepte.

Postulatele sunt urmate de axiome care se referă la cantităţi a căror natură nu se specifică:

A_1 - Două cantităţi egale cu a treia sunt egale între ele.

A_2 - Dacă la cantităţi egale se adaugă cantităţi egale, se obţin cantităţi egale.

A_3 - Dacă din cantităţi egale se scad cantităţi egale, se obţin cantităţi egale.

A_4 - Mărimile care coincid sunt egale.

A_5 - Întregul este mai mare decât partea.

EULER, Leonhard (1707 - 1783), matematician şi fizician elveţian. Profesor universitar la Berlin. A adus contribuţii în teoria numerelor şi geometrie.

EXPRESIE MATEMATICĂ O mulţime de ele-

mente (care în particular pot fi numere sau litere) legate între ele prin simboluri ce reprezintă operaţii matematice, sau care arată ordinea în care se efectuează acestea. Literele care apar în expresii şi iau diferite valori numerice se numesc variabile sau argumente şi se notează cu litere de la sfârşitul alfabetului: $x, y, z, \ldots,$. Literele care pot lua o anumită valoare nu neapărat precizată se numesc parametri şi se notează cu literele de la începutul alfabetului: $a, b, c, \ldots,$. Expresiile în care apar ca operaţii: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere şi extragerea rădăcinii, se numesc *expresii algebrice*. O expresie algebrică care nu conţine radicali la variabile, se numeşte raţională (fracţie raţională). Expresiile raţionale care nu conţin împărţiri se numesc expresii raţionale întregi sau *polinoame*. Polinomul în care nu sunt operaţii de adunare sau scădere se numeşte *monom*. Suma a două monoame se numeşte *binom*. Suma a trei monoame se numeşte *trinom*.

FORMULĂ Relaţie care redă conţinutul unei teoreme matematice. O formulă conţine de regulă diferite variabile, pentru care se obţine totdeauna la introducerea elementelor din anumite mulţimi de definiţie, o expresie adevărată.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ formula binomului valabilă pentru toate numerele a, b;

$A = \frac{b \cdot h}{2}$ aria triunghiului valabilă pentru baza b şi înălţimea corespunzătoare h.

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

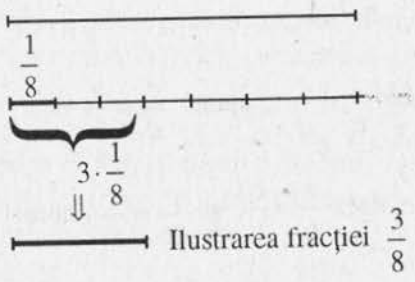
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

FRACŢII Termen folosit pentru a denumi un număr raţional. Fracţia $\frac{m}{n}$ (m, n numere naturale) împarte o mulţime în n părţi egale şi apoi alătură m din aceste părţi.

Ex.:



Ilustrarea fracţiei $\frac{3}{8}$

Fiecare fracţie este formată din o pereche de numere naturale despărţite printr-o linie orizontală: $\frac{m}{n}$, cu $n \neq 0$.

m se numeşte numărătorul fracţiei;

n se numeşte numitorul fracţiei;

linia orizontală se numeşte linia de fracţie.

Fracţie subunitară este fracţia cu numărătorul mai mic decât numitorul, $(m < n)$.

Fracţie echiunitară este fracţia cu numărătorul egal cu numitorul, $(m = n)$.

Fracţia supraunitară este fracţia cu numărătorul mai mare ca numitorul, $(m > n)$.

Fracţii echivalente

Două fracţii $\frac{m}{n}$ şi $\frac{p}{q}$ sunt echivalente dacă

$m \cdot q = n \cdot p$

Se scrie: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

Proprietăţile echivalenţei fracţiilor:

1) reflexivitate: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

2) simetrie: dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

3) tranzitivitate: dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ şi $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, atunci $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

Fracţie ireductibilă este fracţia $\frac{a}{b}$ cu proprietatea că cel mai mare divizor comun al lui a şi b este 1, adică a şi b sunt prime între ele.

Aducerea la acelaşi numitor sau la *numitor comun* a două fracţii $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ este operaţia prin care obţinem două fracţii cu acelaşi numitor, echivalente.

$$\frac{2}{6} = \frac{10}{30}$$

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{30}$$

Numitorul comun a două fracţii $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ este cel mai mic multiplu comun al numitorilor celor două fracţii, adică cel mai mic număr natural h cu $\frac{a}{b} = \frac{e}{h}$ şi $\frac{c}{d} = \frac{f}{h}$

Aflarea unei fracţii dintr-un număr natural Pentru a afla o fracţie dintr-un număr natural, înmulţim numărul raţional reprezentat de fracţie cu numărul natural.

Ex.: $\frac{2}{3}$ din 15 va fi $\frac{2}{3} \cdot 15 = \frac{2 \cdot 15}{3} = \frac{30}{3} = 10$

Aflarea unei fracţii dintr-o fracţie Pentru a afla o fracţie dintr-o fracţie, înmulţim numerele raţionale reprezentate de cele două fracţii.

Ex.: $\frac{2}{5}$ din $\frac{7}{3}$ va fi $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$

Aflarea unui număr când cunoaştem o fracţie din acesta

Pentru a afla un număr când cunoaştem o fracţie din el, împărţim numărul cunoscut la numărul raţional reprezentat de fracţia respectivă.

Ex.:

$\frac{3}{5}$ dintr-un număr este 30. Cât este numărul?

$$30 : \frac{3}{5} = 30 \cdot \frac{5}{3} = 50$$

Numărul căutat este 50.

FRACŢII ALGEBRICE Fracţie algebrică sau raţională este câtul dintre două polinoame în care polinomul de la numitor este diferit de zero.

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0.$$

Orice polinom sau orice monom poate fi transformat într-o fracţie algebrică în care numărătorul este polinomul sau monomul considerat, iar numitorul este 1.

Pentru $a \in \mathbb{R}$, valoarea fracţiei raţionale va fi:

$$F(a) = \frac{P(a)}{Q(a)}, \quad Q(a) \neq 0$$

Pentru $Q(a) = 0$ spunem că fracţia nu este definită.

A amplifica o fracţie algebrică cu un polinom $T(x) \neq 0$, înseamnă a înmulţi şi numărătorul şi numitorul fracţiei cu $T(x)$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot T(x)}{Q(x) \cdot T(x)}$$

A simplifica o fracţie algebrică cu un polinom $T(x)$ diferit de zero, înseamnă a împărţi şi numărătorul şi numitorul cu $T(x)$.

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)}, \text{ pentru } x \in \mathbb{R} - \{-3, -2\}$$

$$\frac{(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-7)} = \frac{x-5}{x-7}, \text{ pentru } x \in \mathbb{R} - \{-1, 7\}$$

Pentru a aduna şi a scădea mai multe fracţii algebrice este necesar să le aducem la acelaşi numitor şi apoi să adunăm sau să scădem numărătorii. *Adunarea* fracţiilor raţionale are aceleaşi proprietăţi ca şi adunarea numerelor reale. *Produsul* a două fracţii raţionale este fracţia obţinută înmulţind numărătorii şi numitorii între ei.

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{P \cdot R}{Q \cdot S}$$

Inversa fracţiei raţionale $\frac{R}{S}$ este fracţia raţională $\frac{S}{R}$ cu $R \neq 0$.

$$\frac{R}{S} \cdot \frac{S}{R} = \frac{S}{R} \cdot \frac{R}{S} = \frac{1}{1} = 1$$

A împărţi două fracţii raţionale înseamnă a înmulţi prima fracţie cu inversa celei de a doua.

$$\frac{P}{Q} : \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{R} = \frac{P \cdot S}{Q \cdot R}$$

FRACŢII PERIODICE Fracţia zecimală infinită este o fracţie ordinară care cuprinde la numitor un factor prim diferit de 2 şi 5, care nu poate fi simplificat.

0,275431.....

Dacă un grup de cifre aflate după virgulă se repetă la infinit avem o fracţie periodică.

$0,235\ 235\ 235..... = 0,(235)$, fracţie periodică simplă.

$0,27\ 43\ 43\ 43..... = 0,27(43)$, fracţie periodică mixtă.

O fracţie zecimală periodică simplă, care înainte de virgulă are numai cifra zero, se transformă într-o fracţie ordinară care la numărător are numărul natural alcătuit din perioada fracţiei zecimale periodice simple date, iar la numitor are un număr natural alcătuit din atâtea cifre de 9 câte are perioada fracţiei zecimale periodice simple date.

$$0,(321) = \frac{321}{999}$$

$$0,(27) = \frac{27}{99}$$

$$0,(4) = \frac{4}{9}$$

O fracţie zecimală periodică simplă se transformă într-o fracţie ordinară obţinută prin adunarea numărului natural de dinainte de virgulă cu fracţia ordinară în care se transformă fracţia zecimală periodică simplă obţinută din fracţia zecimală periodică simplă dată, prin înlocuirea cu zero a părţii de dinainte de virgulă.

$$2,(321) = 2 + \frac{321}{999}$$

$$4,(27) = 4 + \frac{27}{99}$$

O fracţie zecimală periodică mixtă, care înainte de virgulă are numai cifra zero, se transformă într-o fracţie ordinară care la numărător are diferenţa între numărul natural exprimat de partea neperiodică urmată perioadă şi numărul natural exprimat de partea neperiodică, iar ca numitor are un număr natural format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada, urmate de atâtea zerouri câte cifre are partea neperiodică.

$$0,23(151) = \frac{23151-23}{99900}$$

$$1,23(151) = 1 + \frac{23151-23}{99900}$$

FRACŢII ZECIMALE FINITE Orice număr raţional reprezentat de o fracţie ordinară al cărei numitor este o putere a lui 10 se scrie ca o fracţie zecimală finită.

$\frac{137}{10}$; $\frac{13}{100}$; $\frac{15}{1000}$ sunt fracţii ordinare.

$13,7$; $0,13$; $0,015$ sunt fracţii zecimale finite.

Numim partea zecimală, înşiruirea de cifre de după virgulă, într-o fracţie zecimală finită.

La înmulţirea unei fracţii zecimale cu o putere a lui 10, mutăm virgula la dreapta peste atâtea cifre cât arată exponentul lui 10.

$35,923 \cdot 10^2 = 3592,3$

$41,35 \cdot 10^3 = 41350$

La împărţirea unei fracţii zecimale cu o putere a lui 10,

mutăm virgula la stânga peste atâtea cifre cât arată exponentul puterii lui 10.

$39,7 : 10 = 3,97$

$427,35 : 10^2 = 4,2735$

FUNCŢII Dacă printr-un anumit procedeu f, se asociază fiecărui element dintr-o mulţime E, un singur element dintr-o mulţime F, am definit o funcţie de la E la F.

$$f: E \to F$$

E este domeniul de definiţie;

F este mulţimea în care funcţia ia valori;

f este legea de asociere.

Se citeşte „funcţia f definită pe E cu valori în F ".

$\{E, F, f\}$ se numeşte funcţie dacă $x \in E$ şi $y = f(x) \in F$

x este argumentul funcţiei

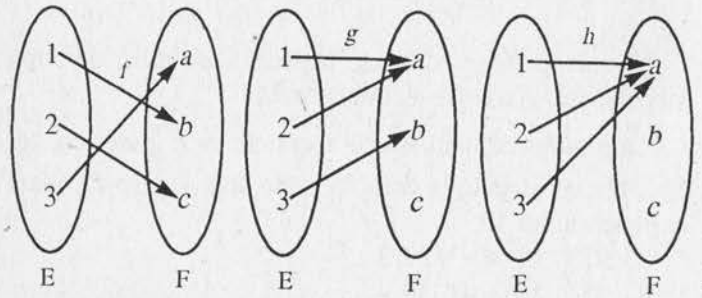
y este valoarea funcţiei în x.

Ex.:

$E = \{1, 2, 3\}$

$F = \{a, b, c\}$

1) Funcţii definite prin diagrame:



$f: E \to F$ $g: E \to F$ $h: E \to F$

2) Funcţii definite prin tabele:

x	1	2	3
$f(x)$	b	c	a

x	1	2	3
$g(x)$	a	a	b

x	1	2	3
$h(x)$	a	a	a

3) Funcţii definite prin formule:

$f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 4, 9\}, \quad f(x) = x^2$

$f: \{4, 6, 8\} \to \{3, 4, 5\}, \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

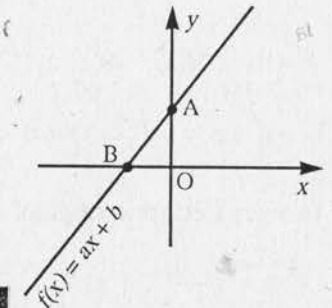
Graficul funcţiei $f: E \to F$ este mulţimea de puncte din plan $M(x, y)$ unde $x \in E$ şi $y = f(x) \in F$

Funcţia liniară

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$f(x) = ax + b$

Graficul funcţiei liniare este o dreaptă.

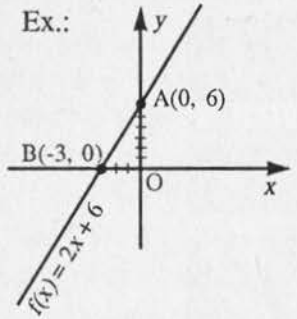


$y = ax + b$

$x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow A(0, b)$

$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow B(-\frac{b}{a}, 0)$

Ex.:



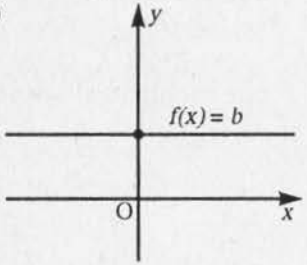
$f(x) = 2x + 6$

$\begin{cases} x = 0 \\ f(0) = 6 \end{cases} \Rightarrow A\,(0,\ 6)$

$\begin{cases} f(x) = 0 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow B\,(-3,\ 0)$

Cazuri particulare:

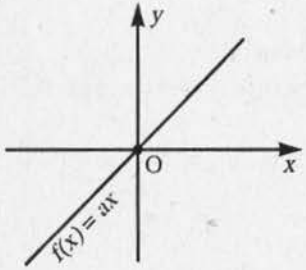
1)



$a = 0 \Rightarrow y = b$

$f(x) = b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2)



$b = 0 \Rightarrow f(x) = ax$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0,0)$

Dreapta trece prin origine.

Dacă $a > 0$, $f(x) = ax + b$ este crescătoare, (fig. 1).
Dacă $a = 0$, $f(x) = b$ este constantă, (fig. 2).
Dacă $a < 0$, $f(x) = ax + b$ este descrescătoare (fig. 3).

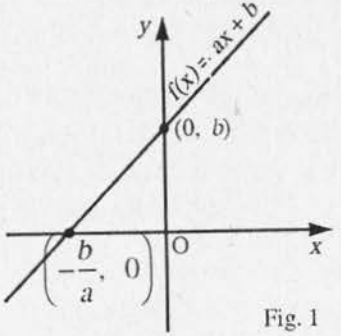


Fig. 1

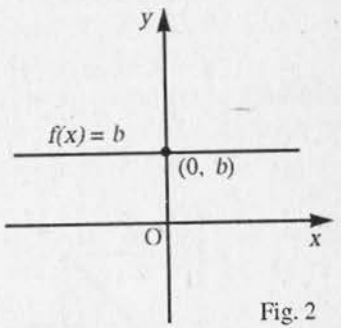


Fig. 2

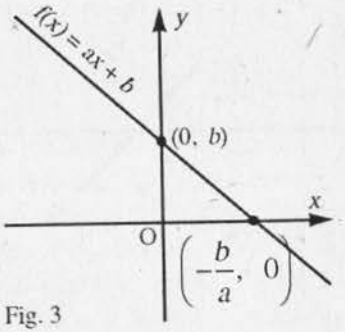


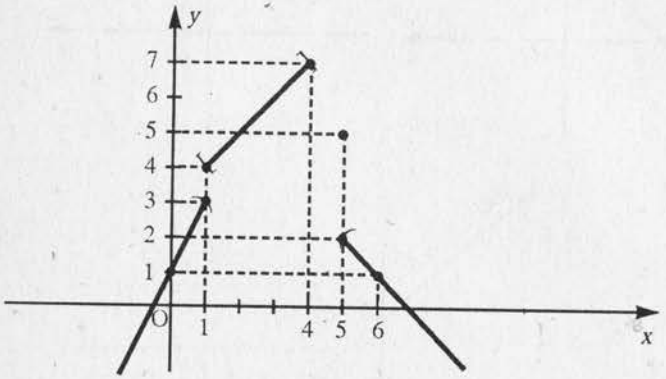
Fig. 3

Semnul funcției de gradul I

x		$-\frac{b}{a}$	
$f(x)$	semn contrar lui a	0	semnul lui a

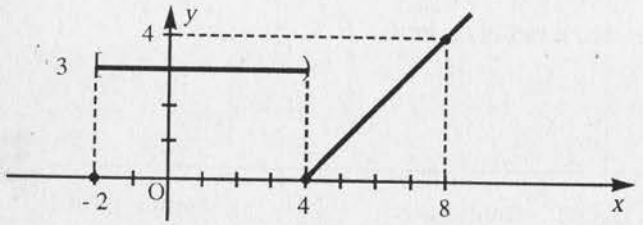
Funcţii în scară O funcţie f : ′a, b) $\rightarrow$ IR, definită pe un număr finit de intervale I_1, $_2$, I_3, ... I_n care formează o partiţie a lui *(a, b)*.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ x+3, & x\in[1,\ 4] \\ 5\ , & x=5 \\ -x+7, & x>5 \end{cases}$$



Funcţie scară definită pe IR.

$$f(x)=\begin{cases} 3, & x\in[-2,\ 4] \\ 0, & x=4 \\ x-4, & x\in(4,\ 8] \end{cases}$$



Funcţie scară definită pe [- 2, 8]

GAUSS, Karl Friederich (1777 - 1855), matematician, fizician şi astronom german. A adus contribuţii fundamentale în mai multe domenii ale matematicii: teoria numerelor, geometrie, algebră.

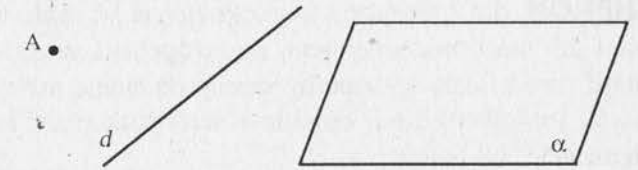
GEOMETRIE Ramură a matematicii care studiază formele corpurilor şi rapoartele lor spaţiale. (Vine de la semnificaţia grecească a cuvintelor *ge* = pământ şi *metron* = măsură).

Dacă figurile studiate sunt situate într-un plan avem geometria plană; dacă nu avem geometria în spaţiu. Proprietăţile figurilor sunt exprimate prin propoziţii. Propoziţiile sunt:

1) axiome — propoziţii evidente prin ele însăşi
2) postulate — propoziţii ce se admit fără demonstraţii
3) leme, teoreme, corolarii — propoziţii care se demonstrează.

Lemele facilitează demonstraţia teoremelor. Corolariile sunt consecinţe imediate ale unei teoreme. Pentru demonstraţie, ţinând seama de ipotezele făcute, pe baza axiomelor şi a unor teoreme demonstrate anterior, cu ajutorul unor raţionamente logice, se va obţine concluzia propoziţiei enunţate. Dacă inversăm ipoteza cu concluzia, obţinem teorema reciprocă.

GEOMETRIE ÎN SPAŢIU Ramură a geometriei care se ocupă de mulţimi de puncte din spaţiu. Noţiunile primare sunt: punctul, dreapta, planul.



Relaţiile de congruenţă şi asemănare acţionează şi în plane diferite. În geometria în spaţiu se studiază corpurile geometrice.

GRAD

1) Unitate de măsură pentru unghiuri
2) În cazul unui polinom:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

este numărul n, dacă $a_n \neq 0$.

$P(x) = 3$; polinom de gradul 0.

$P(x) = 3x - 5$; polinom de gradul 1.

$P(x) = 5x^2 + 2x - 3$; polinom de gradul 2.

Dacă $f(x)$ este un polinom de gradul n, atunci $f(x) = 0$ este o ecuaţie algebrică de gradul n.

$3x - 5 = 0$, ecuaţie de gradul 1.

$5x^2 + 2x - 3 = 0$, ecuaţie de gradul 2.

HADAMARD, Jacques (1865 - 1963) matematician francez. Profesor la Sorbona. Membru de onoare al Academiei Române. Lucrări: „Lecţie de geometrie elementară".

HAIMOVICI, Mendel (1906 - 1973) matematician român. Profesor la Universitatea din Iaşi. Membru al Academiei Române. Cercetări în domeniul geometriei.

HERON din Alexandria, poreclit *Heron Mecanicul* - unul din marii matematicieni- enciclopedişti ai antichităţii care a scris aproape în toate problemele matematicii. În domeniul pur teoretic a scris comentarii la „Elementele" lui Euclid.

În lucrarea „Definiţiile", expune termenii tehnici folosiţi în geometrie, definind noţiunile de geometrie separate, în dezvoltarea lor istorică. Cea mai importantă lucrare este „Metrica" (învăţătura despre măsurare) în trei cărţi. Cartea I conţine regulile de măsurare a ariilor suprafeţelor. Aici este dată formula de calcul a ariei unui triunghi scalen, numită formula lui Heron:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{unde} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

pe care o demonstrează cu ajutorul cercului înscris.

HILBERT, David (1862 - 1943) matematician care a dat un sistem axiomatic în geometrie, în cartea „Bazele geometriei" (1899).

Elementele primare folosite sunt: punctele notate $A, B, C, \ldots$, dreptele, notate $a, b, c, \ldots$, şi planele, notate $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Relaţiile primare sunt: „a aparţine", „între" şi „a fi congruent". Sistemul axiomatic este compus din 20 de axiome, împărţite în cinci grupe.

I *Axiomele de legătură:*

I_1 Prin două puncte trece totdeauna o dreaptă.

I_2 Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.

I_3 Orice dreaptă conţine cel puţin două puncte. Există trei puncte nesituate pe aceeaşi dreaptă.

I_4 Prin trei puncte nesituate pe aceeaşi dreaptă trece un plan. Orice plan conţine cel puţin un punct.

I_5 Prin trei puncte nesituate pe aceeaşi dreaptă trece un singur plan.

I_6 Dacă o dreaptă are două puncte situate într-un plan, atunci toate punctele aparţin planului.

I_7 Dacă două plane trec printr-un punct, atunci ele mai trec printr-un al doilea punct.

I_8 Există patru puncte nesituate în acelaşi plan.

II *Axiomele de ordonare:*

II_1 Dacă punctul B se găseşte între punctele A şi C, atunci punctele A, B, C sunt situate pe aceeaşi dreaptă, sunt distincte şi B se găseşte între C şi A.

II_2 Fiind date două puncte distincte A şi B, există un punct C, astfel încât B să se găsească între A şi C.

II_3 Fiind date trei puncte coliniare distincte A, B, C, dacă A se află între B şi C, atunci C nu se află între A şi B şi nici B nu se află între A şi C.

II_4 Fiind date trei puncte A, B, C nesituate pe aceeaşi dreaptă, şi o dreaptă d din planul lor, dar care nu trece prin nici unul din aceste puncte, atunci dacă dreapta d trece printr-un punct situat între A şi B, ea trece sigur printr-un punct situat între A şi C sau printr-un punct situat între B şi C.

III *Axiomele de congruenţă:*

III_1 Fiind dat un segment AB, o dreaptă d şi un punct O pe dreapta d, există pe dreapta d exact două puncte P_1, P_2, astfel încât să avem $OP_1 = AB$, $OP_2 = AB$. Punctul O se găseşte între P_1 şi P_2.

III_2 Două segmente congruente cu al treilea sunt congruente între ele.

III_3 Dacă B este între A şi C iar B' este între A' şi C' şi dacă $AB \equiv A'B'$ şi $BC \equiv B'C'$, atunci $AC \equiv A'C'$.

III_4 Fiind dat un unghi (h, k) şi o semidreaptă h' într-un plan α, există în planul α exact două semidrepte K_1 şi K_2 care să formeze cu h' unghiuri congruente cu unghiul (h, k). Semidreptele K_1 şi K_2 sunt de o parte şi de alta a dreptei ce conţine semidreapta h'. Orice unghi este congruent cu el însuşi.

III_5 Fiind date două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$, din congruenţele $A \equiv A'$, $AB \equiv A'B'$ şi $AC \equiv A'C'$ rezultă $B \equiv B'$.

IV *Axioma de paralelism:*

IV_1 Printr-un punct exterior unei drepte, nu se poate duce mai mult de o paralelă la acea dreaptă.

V *Axiomele de continuitate:*

V_1 Axioma lui Arhimede.

V_2 Axioma lui Cantor.

HOREZMI, Muhammed ben Musaal (780 - 846), matematician arab. Autor de tratate privitoare la calculele aritmetice, rezolvarea ecuaţiilor, problema calendarului. A scris şi lucrări de trigonometrie.

HUYGENS, Cristian (1629 - 1695), fizician, matematician şi astronom olandez. A scris lucrări de geometrie şi teoria numerelor.

IDENTITATE 1) Noţiune folosită uneori cu sensul de egalitate. 2) O ecuaţie care admite mulţimea de definiţie ca mulţime de soluţii.

$(x+1)(x-1)=x^2-1$ este o identitate pe $\mathbb{R}$.

INECUAŢIE Propoziţie cu o variabilă, în care există unul din simbolurile: „$<$“, „$>$“, „$\leq$“, „$\geq$“.

Ex.:

$3x \leq 9,$

$x \leq 3 \Rightarrow$ mulţimea soluţiilor este $(-\infty, 3]$

A rezolva o inecuaţie înseamnă a afla toate soluţiile sale. Două inecuaţii sunt echivalente dacă au aceeaşi mulţime de soluţii. Pentru rezolvarea unei inecuaţii de gradul I cu o necunoscută: se elimină numitorii numerici, se desfac parantezele, se separă termenii cu necunoscute într-un membru şi cei liberi în celălalt şi se reduc în ambii membrii termenii asemenea. Prin înmulţirea sau împărţirea unei inecuaţii cu un număr negativ, inecuaţia îşi schimbă sensul.

a) $7(3x-5)+4(2x-3)>2x-\frac{3}{5} \Leftrightarrow$

$21x-35+8x-12>2x-\frac{3}{5} \Leftrightarrow$

$29x-47-2x+\frac{3}{5}>0 \Leftrightarrow$

$27x-47+\frac{3}{5}>0 \Leftrightarrow$

$135x-235+3>0 \Leftrightarrow$

$135x-232>0 \Leftrightarrow$

$135x>232 \Leftrightarrow$

$x>\frac{232}{135} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{232}{135}; +\infty\right)$

$\frac{3x-1}{x+2}>1 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x+2}\overset{x+2}{-1}>0 \Leftrightarrow \frac{3x-2-x-2}{x+2}>0$

$\Leftrightarrow \frac{2x+4}{x+2}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4>0 \\ x+2>0 \end{cases} \begin{cases} 2x>4 \\ x>-2 \end{cases} \begin{cases} x>2 \\ x>-2 \end{cases}$

sau $\Leftrightarrow$ sau $\Leftrightarrow$ sau $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x-4<0 \\ x+2<0 \end{cases} \begin{cases} 2x<4 \\ x<-2 \end{cases} \begin{cases} x<2 \\ x<-2 \end{cases}$

$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

INEGALITĂŢI Propoziţii în care apar semnele: „$<$“, „$>$“, „$\leq$“, „$\geq$“.

1) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a<b$, atunci $a+c<b+c$.

2) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a<b$ şi $c>0$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$.

3) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a<b$, $c<0$ atunci $a \cdot c > b \cdot c$, adică dacă înmulţim ambii membri ai unei inegalităţi cu un număr negativ, sensul inegalităţii se schimbă.

4) $a \leq a$, $\forall$ a.

5) Dacă $a \leq b$ şi $b \leq a$ atunci $a=b$.

6) Dacă $a<b$ şi $b<c$ atunci $a<c$.

7) Dacă $a>0$, atunci $-a<0$ şi dacă $a<0$, atunci $-a>0$.

8) $a^2 \geq 0$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

9) Dacă $a>0$, atunci $a^{-1}>0$ şi dacă $a<0$, atunci $a^{-1}<0$.

Regulile semnelor:

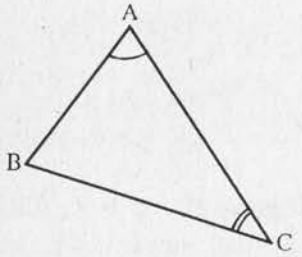
$a \geq 0$ şi $b \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 0$

$a \leq 0$ şi $b \leq 0 \Rightarrow a+b \leq 0$

$a \geq 0$ şi $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$
$a \leq 0$ şi $b < 0 \Rightarrow a + b < 0$
$a \geq 0$ şi $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$
$a > 0$ şi $b > 0 \Rightarrow ab > 0$
$a < 0$ şi $b < 0 \Rightarrow ab > 0$
$a < 0$ şi $b > 0 \Rightarrow ab < 0$
$ab = 0 \Rightarrow a = 0$ sau $b = 0$

Inegalităţi între elementele triunghiului

1) Într-un triunghi, unui unghi mai mare i se opune o latură mai mare.



$m(\hat{A}) > m(\hat{C}) \Rightarrow [BC] > [AB]$

2) Într-un triunghi, unei laturi mai mari i se opune un unghi mai mare

3) Într-un triunghi dreptunghic, ipotenuza este mai mare decât fiecare din catete.

4) Într-un triunghi, lungimea unei laturi este mai mică decât suma celorlalte două.

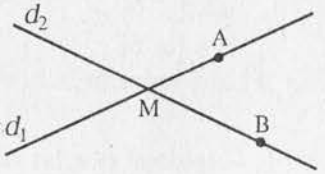
$$BC < AB + AC$$

5) Lungimea unei laturi a unui triunghi este mai mare decât valoarea absolută a diferenţei lungimilor celorlalte două.

$$|BC - CA| < AB$$

INTERSECŢIA A DOUĂ DREPTE

I Două drepte care au un singur punct comun se numesc drepte concurente.

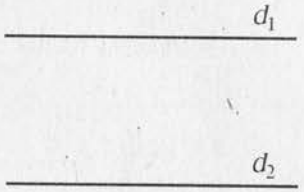


$A \in d_1$

$B \in d_2$

$d_1 \cap d_2 = \{M\}$

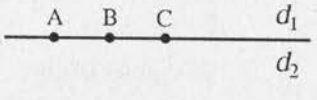
II Două drepte care nu au nici un punct comun se numesc drepte paralele.



$d_1 \parallel d_2$

$d_1 \cap d_2 = \emptyset$

III Două drepte care au toate punctele comune se numesc drepte confundate.



$d_1 \cap d_2 = d_1$

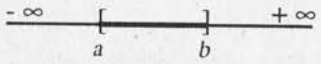
$d_1 \equiv d_2$

$A \in d_1$ $B \in d_1$ $C \in d_1$

$A \in d_2$ $B \in d_2$ $C \in d_2$

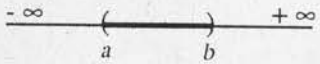
INTERVALE Mulţimea punctelor cuprinse între două puncte date.

1) $[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$ — interval închis de extremităţi a, b.



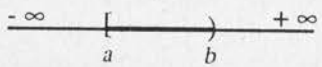
$a \in [a, b]$
$b \in [a, b]$
$[a, b]$ este segment închis

2) $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ — interval deschis de extremităţi a, b.



$a \notin (a, b)$
$b \notin (a, b)$
(a, b) este segment deschis

3) $[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$ — interval închis la stânga.

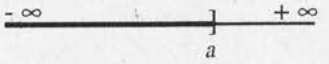


$a \in [a, b)$
$b \notin [a, b)$
$[a, b)$ interval închis la stânga

4) $(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$ — interval închis la dreapta.

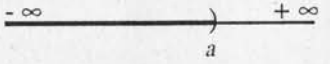
$a \notin (a, b]$
$b \in (a, b]$
$(a, b]$ interval închis la dreapta

5) $(-\infty, a] = \{x \in R \mid x \leq a\}$ — interval nemărginit la stânga.



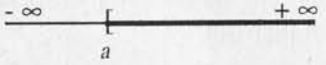
$a \in (-\infty, a]$
semidreaptă la stânga

6) $(-\infty, a) = \{x \in R \mid x < a\}$ — interval nemărginit la stânga.



$a \notin (-\infty, a)$

7) $[a, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq a\}$ — interval nemărginit la dreapta.



$a \in [a, +\infty)$
semidreaptă la dreapta

8) $(a, \infty) = \{x \in R \mid x > a\}$ — interval nemărginit la dreapta.

$a \notin (a, \infty)$
semidreaptă la dreapta

9) $R = (-\infty, \infty)$ — dreapta reală

IPOTEZĂ Totalitatea datelor din enunţul unei teoreme sau probleme. Începe cu cuvântul „dacă“.

ÎMPĂRŢIRE Operaţie fundamentală a aritmeticii prin care un număr, numit *deîmpărţit*, se împarte la un alt număr, numit *împărţitor*, obţinându-se un al treilea număr, numit *cât*. Numerele care se împart se numesc *termeni*. Semnul operaţiei este împărţit (:).

Ex.:

(deîmpărţit)	83795	34	(împărţitor)
	68	2464	(cât)
	157		
	136		
	=219		
	204		
	=155		
	136		
(rest)	=19		

Proba împărţirii se face înmulţind câtul cu împărţitorul şi adunând restul; se obţine deîmpărţitul.

Proprietăţi ale împărţirii: 1) dacă atât deîmpărţitul cât şi împărţitorul se înmulţesc sau se împart cu acelaşi număr, câtul nu se schimbă; 2) un produs este divizibil prin orice alt produs format din termeni ai săi.

Împărţirea unui număr în părţi direct proporţionale cu mai multe numere

Fiind dat un număr pozitiv A, se pune problema găsirii a trei numere pozitive x, y, z a căror sumă este A şi care să fie direct proporţionale cu trei numere pozitive date a, b, c.

$$A = x + y + z$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{A}{a+b+c} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{Aa}{a+b+c} \\ y = \dfrac{Ab}{a+b+c} \\ z = \dfrac{Ac}{a+b+c} \end{cases}$$

Ex.: Suma a trei numere este 27. Să se determine cele trei numere ştiind că ele sunt proporţionale cu numerele 2, 3, 4.

$$x + y + z = 27$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{27}{9} = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \\ z = 12 \end{cases}$$

În acelaşi mod se procedează pentru împărţirea în părţi proporţionale cu mai multe numere.

Împărţirea unui număr în părţi invers proporţionale cu mai multe numere

Fiind dat un număr pozitiv A, se pune problema găsirii a trei numere pozitive x, y, z a căror sumă este A şi care să fie invers proporţionale cu trei numere pozitive date a, b, c.

$$A = x + y + z$$

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{A}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{A}{a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \\ y = \dfrac{A}{b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \\ z = \dfrac{A}{c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \end{cases}$$

Să se împartă numărul 1665 în trei părţi invers proporţionale cu numerele 90, 72 şi 60

$$\frac{x}{\frac{1}{90}} = \frac{y}{\frac{1}{72}} = \frac{z}{\frac{1}{60}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{90}+\frac{1}{72}+\frac{1}{60}} = \frac{1665}{\frac{15}{360}} = \frac{1665 \cdot 360}{15} =$$

$$= 111 \cdot 360$$

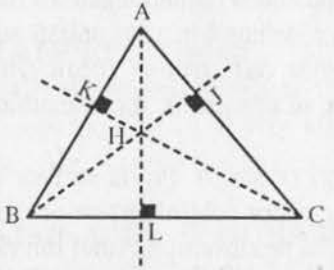
$$\frac{x}{\frac{1}{90}} = 111 \cdot 360 \Rightarrow x = \frac{111 \cdot 360}{90} = 444$$

$$\frac{y}{\frac{1}{72}} = 111 \cdot 360 \Rightarrow y = \frac{111 \cdot 360}{72} = 555$$

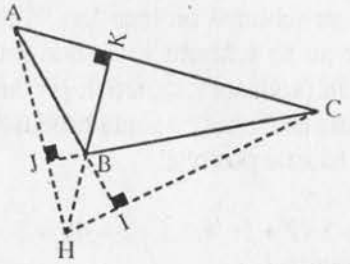
$$\frac{z}{\frac{1}{60}} = 111 \cdot 360 \Rightarrow z = \frac{111 \cdot 360}{60} = 666$$

ÎNĂLŢIMILE UNUI TRIUNGHI Perpendicularele coborâte din vârfurile triunghiului pe laturile opuse. Cele trei înălţimi ale triunghiului sunt concurente.

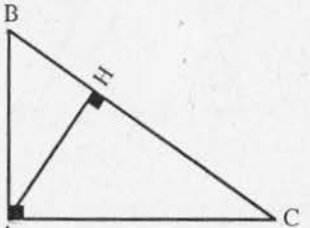
Punctul H de intersecţie al celor trei înălţimi se numeşte *ortocentru*.



În triunghiul oarecare, ortocentrul este interior triunghiului.



În triunghiul obtuzunghic, ortocentrul este exterior triunghiului.



În triunghiul dreptunghic în $\hat{A}$, ortocentrul este chiar vârful A.

ÎNMULŢIRE Operaţie fundamentală a aritmeticii prin care se obţine o sumă de atâtea numere egale cu unul dintre numerele date, numit *deînmulţit*, câte unităţi sunt cuprinse în celălalt număr dat, numit *înmulţitor*. Numerele care se înmulţesc se numesc factori. Rezultatul se numeşte *produs*.

Semnul operaţiei este ori (x sau ·). Proba se face fie prin schimbarea ordinii factorilor (obţinându-se aceleaşi rezultate), fie prin împărţirea produsului cu unul din factori (obţinându-se) celălalt factor.

Proprietăţi ale înmulţirii: 1) produsul mai multor factori nu se modifică dacă se schimbă ordinea lor; 2) produsul mai multor factori nu se schimbă dacă mai mulţi dintre ei sunt înlocuiţi prin produsul lor parţial; produsul a două sau mai multe sume este egal cu suma produselor termenilor luaţi, în toate felurile posibile:

Ex.:

$(3 + 5) \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 48 = 8 \cdot 6$

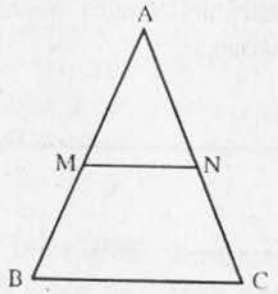
V. *număr întreg, număr raţional.*

KLEIN, Felix (1849 - 1925), matematician german. Profesor universitar la Erlangen şi Göttingen. Prin „Programul de la Erlangen" a introdus o concepţie nouă în geometrie. A condus lucrările „Enciclopediei ştiinţelor matematice şi a aplicaţiilor lor".

LALESCU, Traian (1882 - 1929), matematician român. Profesor universitar la Bucureşti şi Timişoara. Membru de onoare al Academiei Române. Lucrări de geometrie, matematica aplicată, istoria matematicii.

LEONARDO (FIBONACCI) (c. 1180 - c. 1250), matematician italian. A adus contribuţii în domeniile aritmeticii şi algebrei. A introdus folosirea cifrelor arabe în Europa.

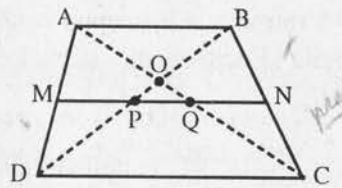
LINIE MIJLOCIE Într-un triunghi, este segmentul care uneşte mijloacele a două laturi.



$$\left.\begin{array}{l} [AM] \equiv [MB] \\ [AN] \equiv [NC] \end{array}\right\} \Rightarrow \text{def. LM l.m.}$$

$$\left.\begin{array}{l} [MN] \parallel [BC] \\ MN = \dfrac{1}{2} BC \end{array}\right\} \text{propr. l.m.}$$

99 Într-un trapez, este segmentul care uneşte mijloacele laturilor neparalele.



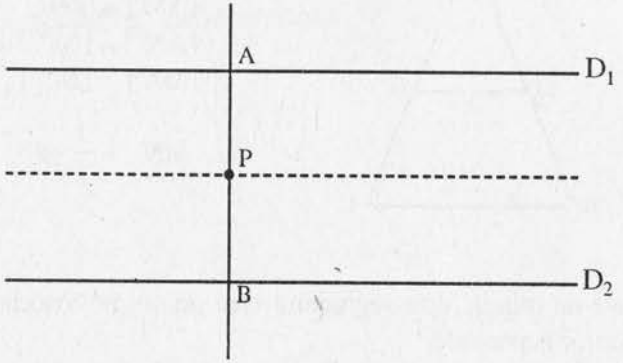
$$[AM] \equiv [MD]$$
$$[BN] \equiv [NC]$$
$$[MN] \parallel [AB] \parallel [CD]$$

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

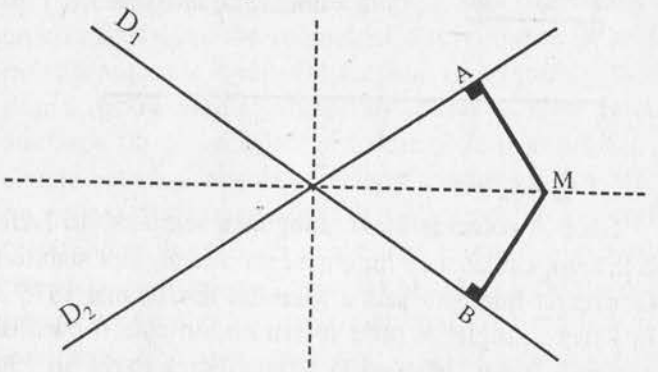
$$PQ = \frac{CD - AB}{2}$$

LOC GEOMETRIC Mulţimea tuturor punctelor având o proprietate dată.

Ex.: 1) locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte date este mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte; 2) locul geometric al punctelor din interiorul unui unghi care sunt egal depărtate de laturile unghiului este bisectoarea acelui unghi; 3) locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte paralele este o dreaptă paralelă cu cele două şi situată între ele astfel încât pe o perpendiculară comună dreptele să determine două segmente congruente;



4) locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente este format de cele două bisectoare ale unghiurilor dintre drepte;



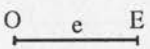
5) locul geometric al punctelor aşa ca raportul distanţelor la două drepte concurente date să fie egal cu un număr dat, este format de două drepte ce trec prin punctul de concurenţă al dreptelor date.

LOBACEVSKI, Nicolai Ivanovici (1792 - 1856), matematician rus. Este unul din creatorii geometriei neeuclidiene. A înlocuit postulatul paralelelor cu afirmaţia că „printr-un punct se pot duce două paralele la o dreaptă dată". A mai adus contribuţii în domeniul algebrei.

LUNGIME Dimensiunea cea mai mare a unui corp sau a unei suprafeţe plane dreptunghiulare. A măsura lungimea $\overline{AB}$ a unui segment $[AB]$ înseamnă a o compara cu un segment unitate $[OE]$. Dacă putem cuprinde segmentul $[OE]$ de n -ori în segmentul $[AB]$, atunci $\overline{AB}$

este multiplu de n a lui $\overline{OE}$ şi scriem:

$$\overline{AB} = n \cdot \overline{OE}$$



e = unitate de lungime

$a = 4e$

Dacă A coincide cu B, lungimea segmentului $[AB]$ este zero. Unitatea de lungime este *metrul*, fapt stabilit la Convenţia Internaţională a Metrului din 20 mai 1875 de la Paris. Lungimea unui metru etalon este o bară din platină - iridiu, păstrată la Sèvres lângă Paris. În 1960 metrul a fost definit ca a 1650763,73-a parte din lungimea undei în vid a liniei spectrale oranj a izotopului de cripton ^{86}Kr la trecerea din stadiul $5d_5$ la stadiul $2p_{10}$.

MATEMATICĂ Ştiinţa care studiază, cu ajutorul raţionamentului deductiv, proprietăţile entităţilor de natură abstractă (numere, puncte, mulţimi . . .) şi relaţiile între acestea. În epoci foarte timpurii s-au dezvoltat procedee matematice ale geometriei din probleme de măsurare a terenurilor şi calculul timpului (la egipteni şi sumerieni). Problemele algebrice au apărut ca nişte calcule auxiliare ale geometriilor şi în calculele negustoreşti. În Grecia antică a început cercetarea numerelor din puncte de vedere pur matematice. A apărut teoria numerelor (divizibilitatea) şi s-au descoperit numerele iraţionale (Pitagora şi şcoala lui). Euclid din Alexandria a dat o imagine complexă asupra matematicii timpului său. Arhimede a efectuat calcule de lungimi, arii şi volume. Matematica română s-a limitat la probleme practice. Matematica arabă, sub influenţa celor indiene şi chineze a evoluat în trigonometrie şi teoria ecuaţiilor. La începutul epocii moderne a avut loc o dezvoltare a calculului negustoresc şi algebric în Italia, Germania, Franţa. Cardano introduce calculul literal şi tratează numerele negative. Matematica s-a născut din necesităţi practice, deci rezultatele ei trebuiau să fie aplicabile în situaţii practice. Putem înţelege matematica mai întâi ca pe o ştiinţă a naturii, bazele ei izvorând din concepţia despre lume. De la Euclid s-a simţit nevoia să se redea cât mai exact aceste baze, să se formuleze axiome ale matematicii pentru a clarifica ce fapte pot fi acceptate ca atare şi care pot fi deduse cu mijloace logice. Domenii ale matematicii sunt: algebra, geometria trigonometria etc.. Domeniile de aplicare ale matematicii sunt: fizica, ştiinţele inginereşti, ştiinţele economice, psihologia, lingvistica, medicina etc..

MĂRIMI DIRECT PROPORŢIONALE Două mărimi care depind una de alta, astfel că dacă una creşte de un număr de ori, cealaltă creşte de acelaşi număr de ori. Două mărimi variabile x şi y, variază direct proporţional când raportul valorilor lor este constant:

$$\frac{y}{x} = a$$

$$y = ax \qquad \text{(funcţie de gradul I)}$$

Ex. de mărimi direct proporţionale:

- spaţiul parcurs în mişcare rectilinie uniformă şi timpul scurs de la începerea mişcării
- rezistenţa electrică a unei sârme şi lungimea ei
- lungimea unui resort şi greutăţile care-l solicită

Metode de rezolvare a problemelor în care intră două mărimi direct proporţionale:

Pentru 15 caiete un elev plăteşte 5400 lei. Cât vor costa 90 de caiete ?

1) Metoda proporţiei:

$$\frac{15}{90} = \frac{5400}{x} \Rightarrow x = \frac{\overset{6}{\cancel{90}} \cdot 5400}{\underset{5}{\cancel{15}}} = 32400 \text{ lei}$$

2) Metoda aşezării:

15 caiete ..... 5400 lei
90 caiete ..... x lei

$$x = \frac{90 \cdot 5400}{15} = 32400 \text{ lei}$$

3) Metoda reducerii la unitate:

15 caiete ..... 5400 lei

1 caiet ..... $\frac{5400}{15}$ lei

90 caiete ..... $\frac{5400}{15} \cdot 90 = 32400$ lei

MĂRIMI INVERS PROPORŢIONALE Două mărimi care depind una de alta, astfel încât dacă una se măreşte de un număr de ori, cealaltă se micşorează de acelaşi număr de ori. Două mărimi variabile x şi y, variază invers proporţional când produsul lor este constant: $x \cdot y = a$

Ex. de mărimi invers proporţionale:

- baza şi înălţimea unui triunghi de arie constantă:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow b \cdot h = 2A$$

- volumul ocupat de un gaz şi presiunea lui când temperatura rămâne constantă:

$$p \cdot v = k \text{ (legea Boyle - Mariotte)}$$

- rezistenţa unui circuit electric şi intensitatea curentului care îl străbate dacă forţa electromotoare aplicată rămâne constantă:

$$R \cdot I = E \text{ (legea lui Ohm)}$$

Metode de rezolvare a problemelor în care intră două mărimi invers proporţionale:

Pentru a efectua o lucrare cinci zidari au nevoie de 12 ore. În câte ore vor efectua aceiaşi lucrare 9 zidari ?

1) Metoda proporţiei:

$$\frac{5}{9} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot \overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{20}{3} = 6 \text{ ore } 40 \text{ minute}$$

2) Metoda aşezării:

5 zidari . . . . . 12 ore
9 zidari . . . . . x ore

$$x = \frac{5 \cdot \cancel{12}^{4}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{20}{3} = 6 \text{ ore } 40 \text{ minute}$$

3) Metoda reducerii la unitate:

5 zidari . . . . . 12 ore

1 zidar. . . . . $12 \cdot 5 = 60$ ore

9 zidari . . . . . $\frac{\cancel{60}^{20}}{\cancel{9}_{3}} = 6$ ore 40 minute

3) Metoda introducerii unor unităţi ajutătoare:

5 zidari . . . . . 1 h . . . . . 5 norme

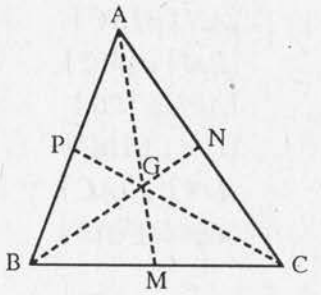
5 zidari . . . 12 h . . . $5 \cdot 12 = 60$ norme (toată lucrarea)

9 zidari . . . . . 1 h . . . . . 9 norme

9 zidari . . . . . x h . . . . 60 norme

$$x = \frac{60}{9} = 6 \text{ ore } 40 \text{ minute}$$

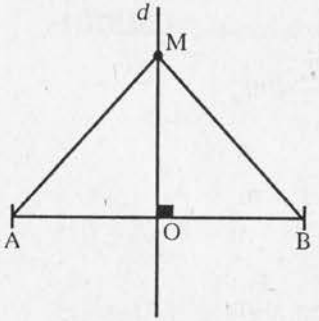
MEDIANELE UNUI TRIUNGHI Segmentele care unesc vârfurile unui triunghi cu mijloacele laturilor opuse. Cele trei mediane ale unui triunghi sunt concurente. Punctul lor de intersecţie G este centrul de greutate al triunghiului.



$$AG = \frac{2}{3} AM$$
$$BG = \frac{2}{3} BN$$
$$CG = \frac{2}{3} CP$$

G se află pe fiecare mediană la $\frac{2}{3}$ de vârf şi $\frac{1}{3}$ de bază.

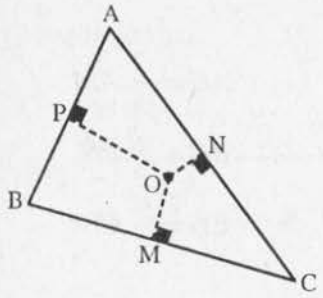
MEDIATOARE Dreapta perpendiculară pe mijlocul unui segment.



$[AO] \equiv [OB]$
$d \perp [AB]$
$M \in d$
$\Delta MAO \equiv \Delta MOB \Rightarrow$
$\Rightarrow [MA] \equiv [MB]$

Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului.

MEDIATOARELE UNUI TRIUNGHI Dreptele perpendiculare pe mijloacele laturilor. Cele trei mediatoare sunt concurente. Punctul lor de intersecţie este centrul cercului circumscris triunghiului.



$[AN] \equiv [NC]$
$[BM] \equiv [MC]$
$[AP] \equiv [PB]$
$[OM] \perp [BC]$
$[ON] \perp [AC]$
$[OP] \perp [AB]$

MEDIE Număr asociat, prin anumite procedee de calcul, unui grup de numere astfel încât: 1) media este cuprinsă între cel mai mic şi cel mai mare dintre numerele considerate; 2) media este egală cu numerele considerate dacă acestea sunt egale între ele. Pentru A şi B două numere reale:

Media aritmetică: $\dfrac{A+B}{2} = m_a$

Media geometrică: $\sqrt{A \cdot B} = m_g$
(sau proporţională)

Media armonică: $\dfrac{2}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}} = m_\alpha$

Ex.: $A = 5$
$B = 7$

$$m_a = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$m_g = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35}$$

$$m_\alpha = \frac{2}{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}} = \frac{2}{\frac{7+5}{35}} = \frac{2 \cdot 35}{12} = \frac{70}{12}$$

Inegalitatea mediilor:

$$\frac{2}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}} \leq \sqrt{A \cdot B} \leq \frac{A+B}{2}$$

$$m_\alpha \leq m_g \leq m_a$$

MODUL Valoarea absolută a unui număr.

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$|+3| = 3$; $|0| = 0$; $|-5| = 5$; $\left|+\frac{4}{7}\right| = \frac{4}{7}$; $|+4| = 4$;

$|-2| = 2$; $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$.

$|a| \geq a$

$|-13| = 13 \Rightarrow 13 \geq -13$

$|13| = 13 \Rightarrow 13 = 13$

Modulul este întotdeauna pozitiv.

$|a| \geq 0$

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases} \qquad \forall\ a, b \in \mathbb{R}$$

$$\min(a, b) = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases} \qquad \forall\ a, b \in \mathbb{R}$$

Dacă $a > 0$ $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ |x| \leq a\} = [-a, a]$

$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ |x| < a\} = (-a, a)$

$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ |x| \geq a\} = (-\infty, -a] \cup [+a, +\infty)$

$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ |x| > a\} = (-\infty, -a) \cup (+a, +\infty)$

Proprietăţi:

$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;

$|x + y| \leq |x| + |y|$;

$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$.

MOISIL, Grigore C. (1906 - 1973), matematician român. Membru al Academiei Române. Profesor la Universitatea din Bucureşti. Lucrări în domeniul algebrei, geometriei şi logicii matematice pe care a aplicat-o la tehnica automatizărilor.

MONOM Expresie formată din produse de numere întregi, numere raţionale şi litere.Forma canonică a unui monom este un număr raţional sau un produs dintre un

număr raţional şi puteri de litere diferite.

Exemple de monoame:

$$\frac{3}{9}a^4b^3c^2d; \qquad -\frac{2}{7}b^3c;$$

$$20a^2b^2c; \qquad -30ab^3c^2d^4;$$

Numărul raţional din forma canonică a monomului se numeşte *coeficientul monomului.*

Gradul unui monom diferit de zero, este suma exponenţilor literelor care fac parte din el. Dacă într-un monom nu figurează nici o literă, monomul are gradul zero. Gradul unui monom diferit de zero, în raport cu un grup de litere, respectiv o literă, este suma exponenţilor literelor respective sau exponentul literei din monomul considerat.

Monomul $\frac{3}{19}a^4b^3c^5$:are coeficientul $\frac{3}{19}$; are gradul 12 în raport cu literele a, b, c; are gradul 7 în raport cu literele a şi b; are gradul 4 în raport cu litera a; are gradul zero în raport cu orice altă literă diferită de a, b, şi c.

Operaţiile cu monoame se efectuează ca şi operaţiile cu numere raţionale. Produsul a două monoame este un monom.

$$(7x) \cdot (-2xy) = -14x^2y$$

Puterea unui monom în care exponentul este un număr natural, este un monom.

$$(7x^2y)^3 = 343x^6y^3$$

Dacă E şi F sunt două monoame astfel încât $F \neq 0$, câtul

între monoamele E şi F notat $\frac{E}{F}$, este acel monom C,

dacă acesta există, pentru care $E = C \cdot F$

Monoame asemenea sunt monoamele care au acelaşi grad în raport cu fiecare nedeterminată.

$$2x^3y^4 \quad \text{şi} \quad -7x^3y^4;$$

$$-\frac{3}{5}xy^2z^3 \quad \text{şi} \quad \frac{4}{3}xy^2z^3.$$

MULŢIMI Ansamblu de obiecte, (elemente) dat prin indicarea tuturor elementelor sau prin formularea unei proprietăţi caracteristice numai lor. În forma enumerativă (forma unei liste), elementele mulţimii (despărţite de virgule), se scriu între acolade, ordinea lor nefiind importantă.

Mulţimea divizorilor lui 12 poate fi scrisă sub forma $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

În forma descriptivă se indică o proprietate E care este valabilă pentru toate elementele mulţimii şi numai pentru ele. În acest caz:

$M = \{x \mid E(x)\}$

şi se citeşte „M este mulţimea tuturor x cu proprietate $E(x)$".

Ex.: $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 12\}$

sau $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ şi } x \text{ divide } 12\}$.

„$\in$" este simbolul aparţine.

„$\notin$" este simbolul nu aparţine.

Pentru $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $4 \in A$ şi $7 \notin A$.

„$\subset$" este simbolul inclus.

„$\not\subset$" este simbolul nu este inclus.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad B \subset A$

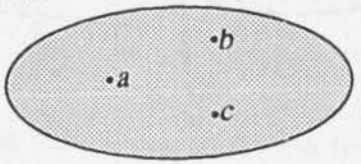
$B = \{1, 2\}$ $\quad$ şi

$C = \{4, 6, 7\}$ $\quad C \not\subset A$

$B \subset A$ dacă orice element din B este şi în A.

Diagrame Venn-Euller

O figură în care elementele unei mulţimi sunt înconjurate cu o linie închisă.

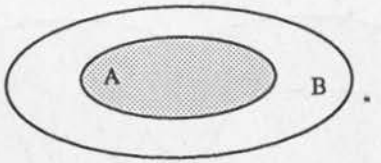


Mulţime vidă este mulţimea fără nici un element. Se notează cu Ø.

Submulţimi

$A \subseteq B$

A este o submulţime a mulţimilor B dacă A este inclusă în B.



Mulţimi egale

Două mulţimi A şi B sunt egale dacă au aceleaşi elemente.

$A = \{a, b, c\} \Rightarrow A = B$

$B = \{b, c, a\}$

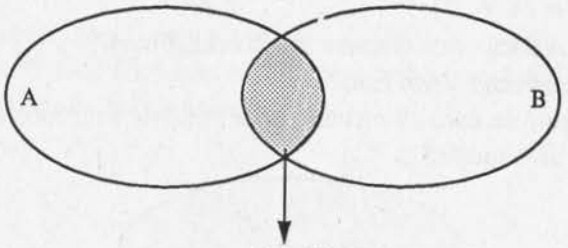
$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ şi $B \subset A$

Operaţii cu mulţimi

1) Intersecţia mulţimilor A şi B este mulţimea elementelor

comune mulţimilor A şi B; fiecare element figurând o singură dată.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$

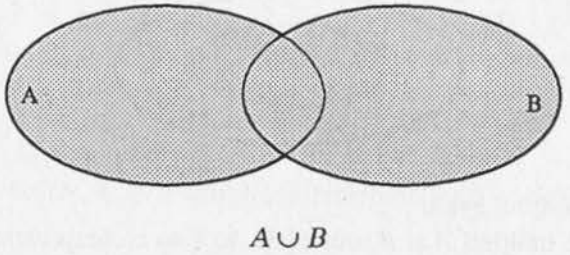


Ex.:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\} \\ B = \{a, b, e, f\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B = \{a, b\}$$

2) Reuniunea mulţimilor A şi B este mulţimea tuturor elementelor din A şi B luate o singură dată.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

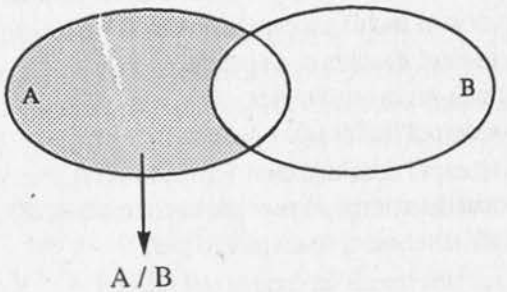


Ex.:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\} \\ B = \{a, b, e, f\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

3) Diferenţa mulţimilor A şi B este mulţimea elementelor care aparţin mulţimii A şi nu aparţin mulţimii B.

$A - B = A / B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$



Ex.:

$$\left.\begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\} \\ B = \{a, b, e, f\} \end{array}\right\} \Rightarrow A / B = \{c, d\}$$

NOTAŢII Semn grafic simbol prin care se reprezintă ceva.

AB : dreapta determinată de punctele diferite A şi B

$[AB]$: segmentul închis cu capetele A şi B

(AB): segmentul deschis cu capetele A şi B

AB : lungimea segmentului AB

$[AB$: semidreaptă închisă cu originea în A

$(AB$: semidreaptă deschisă cu originea în A

(ABC): planul determinat de punctele necoliniare A, B, şi C

(d, d_1): planul determinat de dreptele d şi d_1

(d, A): planul determinat de dreapta d şi punctul A

$\sphericalangle ABC$: unghiul cu vârful în B

$m(\sphericalangle ABC)$: măsura în grade, a interiorului unghiului ABC

$d \parallel \alpha$: dreapta d este paralelă cu planul α

$d \parallel d_1$: dreptele d şi d_1 sunt paralele

$d \perp d_1$: dreptele d şi d_1 sunt perpendiculare

$d \nparallel d_1$: drepta d nu este paralelă cu dreapta d_1

$d \cap d_1 = \{M\}$: dreptele d şi d_1 se intersectează în M

$S_{[ABC]}$: aria triunghiului ABC

$\overset{\frown}{AB}$: arcul de cerc AB

$m(\overset{\frown}{AB})$: măsura în grade a arcului AB

$\sin \hat{A}$: sinusul măsurii în grade a interiorului unghiului cu vârful în A

$\cap$: intersecţie

$\cup$: reuniune

C_B^A : complementara mulţimii A referitoare la mulţimea B

$\wedge$: şi

$\vee$: sau

$\exists$: există

$\forall$: oricare

$\Rightarrow$: implică

$\in$: aparţine

$\subset$: inclus

NUMĂR Iniţial prin numere se înţelegeau numerele potrivite pentru numărat, adică numerele naturale 1, 2, 3, . . Acestea servesc atât la indicarea unei numărători(5 oi, 17 broaşte, 20 oameni), cât şi la indicarea numărului de locuri (clasa a 7-a, Şcoala 179). Numerele naturale servesc şi ca numere cardinale şi ca numere ordinale. Erau necesare şi numere care să se potrivească la măsurători (comparativ). Acum 2000 de ani î. Hr., egiptenii şi sumerienii socoteau cu numere fracţionare

$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots\ldots$ În 500 î. Hr. s-au făcut în Grecia primele încercări de recunoaştere a numerelor iraţionale: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... Zero şi numerele negative au fost folosite în India şi introduse de matematicienii arabi în Europa. Matematicianul francez Viète, elveţianul Jobst Bürgt (1552 - 1632) şi flamandul Simon Stevin au folosit prima dată fracţiile zecimale. Numărul real a fost explicat satisfăcător abia în secolul XIX.

NUMĂR IMPAR x se numeşte număr impar, dacă există un număr natural n astfel încât $x = 2n + 1$.

NUMĂR IRAŢIONAL

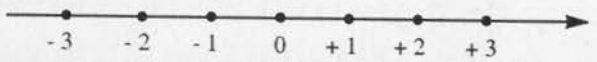
$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$,... sunt numere iraţionale pentru că nu există nici un număr raţional care ridicat la pătrat să fie 2, 3 sau 7. Numerele: $-\sqrt{8}$, $-\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ se numesc numere iraţionale.

Numărul $\pi = 3,14...$ este tot un număr iraţional.

Numerele raţionale împreună cu numerele iraţionale

formează mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$.
Numerele iraţionale se reprezintă sub formă de fracţii zecimale neperiodice.
$\sqrt{2} = 1,414\ldots\ldots\ldots$; $\sqrt{2} \approx 1,41$.
$\pi = 3,141\ldots\ldots\ldots$; $\pi \approx 3,14$.
Orice fracţie zecimală infinită neperiodică reprezintă un număr iraţional.

NUMĂR ÎNTREG Sunt numerele . . . - 3, - 2, - 1, 0, + 1, + 2, + 3, . . .
Mulţimea numerelor întregi se notează cu $\mathbb{Z}$. Numerele întregi sunt reprezentate ca puncte pe axa numerelor



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

dacă $a,\ b \in \mathbb{N}$, pentru adunare sunt valabile următoarele reguli:

$(+a) + (+b) = +(a+b)$
$(-a) + (-b) = -(a+b)$

$$(+a) + (-b) = \begin{cases} +(a-b) & \text{daca } b < a \\ 0 & \text{daca } b = a \\ -(a-b) & \text{daca } a < b \end{cases}$$

Ex.:

1) $(+2) + (+3) = +(2+3)$
$2 + 3 = 5$
$5 = 5$

2) $(-2) + (-3) = -(2+3)$
$-2 - 3 = -5$
$-5 = -5$

3) $(+2) + (-3) = 2 - 3$
$-1 = -1$

4) $(-2) + (+3) = -2 + 3$
$1 = 1$

Pentru înmulţire sunt valabile următoarele reguli:

$(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b)$
$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$
$(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$

Ex.: $(+2) \cdot (+5) = +10$
$(-2) \cdot (-5) = +10$
$(-2) \cdot (+5) = -10$
$(+2) \cdot (-5) = -10$

Proprietăţile adunării:
1) asociativitate: $a + (b + c) = (a + b) + c,\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}$
2) comutativitate: $a + b = b + a,\ \forall\ a, b \in \mathbb{Z}$
3) element neutru: $a + 0 = 0 + a = a,\ \forall\ a, \in \mathbb{Z}$
0 se numeşte element neutru
4) opusul: $a + (-a) = (-a) + a = 0,\ \forall\ a, \in \mathbb{Z}$
Numărul „$-a$" se numeşte opusul lui a.

Proprietăţile înmulţirii:
1) asociativitatea: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}$
2) comutativitatea: $a \cdot b = b \cdot a,\ \forall\ a, b \in \mathbb{Z}$
3) element neutru: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,\ \forall\ a, \in \mathbb{Z}$
1 se numeşte element neutru.
4) distributivitatea faţă de adunare: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ \forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}$

5) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
6) $a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$

Ex.:
Adunare:
1) $-2 + (3 + 4) = (-2 + 3) + 4$
$-2 + 7 = 1 + 4$
$5 = 5$

2) $-2 + 7 = 7 + (-2)$
$5 = 5$

3) $7 + 0 = 0 + 7 = 7$
$7 = 7$

4) $7 + (-7) = (-7) + 7 = 0$
$7 - 7 = -7 + 7$
$0 = 0$

Înmulţire:

1) $(-2) \cdot (3 \cdot 4) = (-2 \cdot 3) \cdot 4$
$-2 \cdot 12 = -6 \cdot 4$
$-24 = -24$

2) $(-2) \cdot 3 = 3 \cdot (-2)$
$-6 = -6$

3) $(-3) \cdot 1 = 1 \cdot (-3)$
$-3 = -3$

4) $(-3) \cdot (4 + 5) = (-3) \cdot 4 + (-3) \cdot 5$
$(-3) \cdot 9 = -12 - 15$
$-27 = -27$

Scăderea: dacă a şi b sunt două numere întregi diferenţa dintre a şi b, notată $a - b$, este acel număr întreg c pentru care $a = b + c$.

$c = a - b$

În general: $a - b = a + (-b)$; adică scăderea este adunarea cu opusul unui număr pozitiv.

$a - 0 = a$

$0 - a = -a$

Dacă $a = b$, atunci $a - c = b - c$.

În cazul deschiderii parantezelor, minus în faţa unei paranteze schimbă semnele din paranteză:

$-(a + b - c - d + e) = -a - b + c + d - e$

Împărţirea: dacă a şi b sunt două numere întregi, astfel ca $b \neq 0$, câtul dintre a şi b notat $a : b$, este acel număr întreg c, în cazul în care el există, pentru care $a = b \cdot c$

$c = a : b$

a se numeşte deâmpărţit;
b se numeşte împărţitor;
c se numeşte cât;

$0 : a = 0$

Pentru orice numere întregi a, b, c cu $a = b$ şi $c \neq 0$ dacă se pot efectua împărţirile $a : c$ şi $b : c$ atunci $a : c = b : c$

Pentru orice numere întregi a, b, c, d cu $a = b$, $c = d$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, dacă se pot efectua împărţirile $a : c$ şi $b : d$, atunci $a : c = b : d$

Puterea unui număr întreg

Dacă a este un număr întreg şi n un număr natural astfel încât $n \neq 0$ şi $n \neq 1$ atunci

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

a se numeşte baza,
n se numeşte exponent,
a^n este puterea a n - a a lui a

Proprietăţi:

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

NUMĂR NATURAL Sânt numerele $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$ Mulţimea numerelor naturale se notează cu $\mathbb{N}$ (litera mare N cu dublă linie la început).

$\mathbb{N}^*$ = mulţimea numerelor naturale fără zero.

$\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$

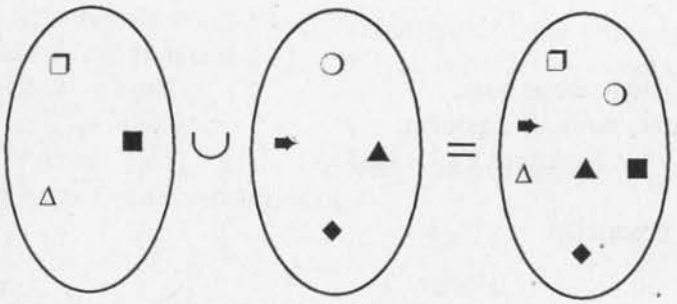
Numerele naturale servesc pentru numărătoare şi se scriu cu ajutorul cifrelor.

Operaţii cu numere naturale

1) *Adunarea:* Fiind date două numere naturale a şi b numim suma lor, numărul natural $a + b$.

a şi b se numesc termenii sumei.

Adunarea numerelor naturale poate fi explicată pe baza reuniunii mulţimilor fără elemente străine.



O altă posibilitate constă în introducerea adunării cu ajutorul numerelor de bucăţi de obiecte de acelaşi tip:

3 mere + 4 mere = 7 mere

Pe de altă parte numerele naturale pot fi explicate cu ajutorul adunării, respectiv numărării în continuare:

$8 = 7 + 1$ (numărare în continuare)

$= 6 + 2$

$= 5 + 3$ } (compunere)

$= \ldots$

Proprietăţile adunării numerelor naturale:

a) comutativitatea adunării

$\forall\, a, b \in \mathbb{N},\quad a + b = b + a$

b) asociativitatea adunării:

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{N},\quad (a + b) + c = a + (b + c)$

c) numărul natural 0 (zero) este element neutru la adunarea numerelor naturale:

$\forall\, a \in \mathbb{N},\quad 0 + a = a + 0 = a$

Ex.:

a) $2 + 4 = 4 + 2$

$6 = 6$

b) $2 + (3 + 7) = (2 + 3) + 7$

$2 + 10 = 5 + 7$

$12 = 12$

c) $2 + 0 = 0 + 2$

$2 = 2$

2) *Înmulţirea:* numim produsul a două numere naturale a şi b, numărul natural $a \cdot b$

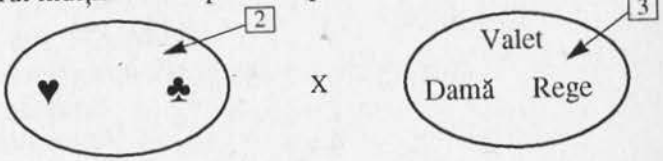
a şi b se numesc factorii produsului.

Produsul unui număr natural diferit de 0 şi 1 se exprimă printr-o sumă, în care primul număr apare ca termen de atâtea ori de câte ori arată al doilea număr natural.

Produsul unui număr natural cu zero este zero.

Produsul unui număr natural cu unu este numărul natural considerat.

Înmulţirea numerelor naturale se explică adesea cu ajutorul mulţimilor de perechi (produs cartezian).



(♥ Valet) (♥ Damă) (♥ Rege)

(♣ Valet) (♣ Damă) (♣ Rege)

$2 \cdot 3 = 6$

$4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5$ sau $4 \cdot 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

Înmulţirea este definită ca o adunare repetată.

Proprietăţile înmulţirii numerelor naturale:

a)comutativitate

$\forall\, a, b \in \mathbb{N},\quad a \cdot b = b \cdot a$

b)asociativitate

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{N},\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

c)numărul natural 1 este element neutru la înmulţirea numerelor naturale:

$\forall\, a \in \mathbb{N},\quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

d)distributivitate faţă de adunare şi scădere:

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{N},\quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Ex.:

a) $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2$

$8 = 8$

c) $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2$

$2 = 2$

b) $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$

$6 \cdot 5 = 2 \cdot 15$

$30 = 30$

d) $2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$

$2 \cdot 7 = 6 + 8$

$14 = 14$

e) $2 \cdot (5 - 3) = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3$

$2 \cdot 2 = 10 - 6$

$4 = 4$

3) *Scăderea:* diferenţa dintre două numere naturale a şi b astfel încât $a \geq b$ notată prin $a - b$, este acel număr natural c, pentru care $a = b + c$

Se scrie: $c = a - b$

a se numeşte descăzut.

b se numeşte scăzător

Descăzutul este mai mare sau egal cu scăzătorul.

Ex.:

$9 - 5 = 4,\quad 9 > 5$

$9 - 9 = 0,\quad 9 = 9$

4) *Împărţirea:* dacă a şi b sânt două numere naturale astfel încât $b \neq 0$, câtul între a şi b, notat prin $a : b$ este numărul natural c, în cazul în care el există, pentru care $a = b \cdot c$

Scriem $c = a : b$

a se numeşte deâmpărţit

b se numeşte împărţitor

c se numeşte cât

Câtul dintre 0 şi un număr natural diferit de 0 este 0.

Ex.:

$16 : 2 = 8$ deoarece $8 \cdot 2 = 16$

Teorema împărţirii întregi (teorema împărţirii cu rest). Oricare ar fi numerele naturale a şi b, cu $b \neq 0$, există două numere naturale c şi r astfel încât $a = b \cdot c + r$, unde $r < b$.

c se numeşte cât.

r se numeşte rest.

Ex.:

$17 = 3 \cdot 5 + 2$

17 este deâmpărţitul.

3 este împărţitorul, $3 \neq 0$

5 este câtul

2 este restul, $2 < 3$.

Inegalităţi între numere naturale Un număr natural a este mai mare decât un număr natural b, dacă există un număr natural $c \neq 0$, astfel încât $a = b + c$

Se notează $a > b$ şi se citeşte „a mai mare strict decât b" sau „b mai mic strict decât a"

Ex.:

$90 > 50$ deoarece $90 = 50 + 40; 40 \neq 0$

Dacă $a > b$ sau $a = b$, vom scrie $a \geq b$.

Aceasta este o inegalitate nestrictă.

Se citeşte „a mai mare decât b" sau „b mai mic decât a".

Relaţia de ordine în $\mathbb{N}$

Inegalitatea $a \leq b$ este o relaţie de ordine în $\mathbb{N}$.

Relaţia de ordine este o relaţie cu următoarele proprietăţi:

1) reflexivitate:

$\forall\, a \in \mathbb{N},\ a \leq a$;

2) antisimetrie:

$\forall\, a, b \in \mathbb{N}$, dacă $a \leq b$ şi $b \leq a$ atunci $a = b$;

3) tranzitivitate:

$\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$, dacă $a \leq b$ şi $b \leq c$ atunci $a \leq c$.

Relaţia de inegalitate are şi proprietăţi de tranzitivitate, adică oricare ar fi numerele naturale a, b, c cu $a < b$ şi $b < c$, rezultă $a < c$.

Proprietăţile relaţiei de inegalitate

1) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a < b$, rezultă $a + c < b + c$

2) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, rezultă $a + c \leq b + c$

3) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a < b$ şi $a \geq c$, $b \geq c$, rezultă $a - c < b - c$

4) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$ şi $a \geq c$, $b \geq c$, rezultă $a - c \leq b - c$

5) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a < b$ şi $c \neq 0$, rezultă $a \cdot c < b \cdot c$

6) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, rezultă $a \cdot c \leq b \cdot c$

7) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a < b$, $c \neq 0$ şi se pot efectua împărţirile între a şi c şi între b şi c, rezultă $a : c < b : c$

8) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, $c \neq 0$ şi se pot efectua împărţirile între a şi c şi b şi c, rezultă $a : c \leq b : c$

Puterea unui număr natural

Pentru a şi n numere naturale cu $n \notin \mathbb{N} - \{0, 1\}$, a^n este produsul a n factori egali cu a adică:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

a se numeşte baza puterii

n se numeşte exponentul puterii

Proprietăţi:

a) $a^0 = 1$

b) $a^1 = a$

c) $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$

d) $a^n : a^m = a^{n-m}$

e) $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$

f) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Ex.:

a) $5^0 = 1$

$7^0 = 1$

b) $5^1 = 5$

$7^1 = 7$

c) $2^6 \cdot 2^2 = 2^{6+2}$

$$\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)}_{2^6} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2)}_{2^2} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^8}$$

d) $2^4 : 2^3 = 2^{4-3}$

$16 : 8 = 2$

f) $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$

$10^3 = 8 \cdot 125$

$1000 = 1000$

e) $\left(2^3\right)^2 = 2^{3 \cdot 2}$

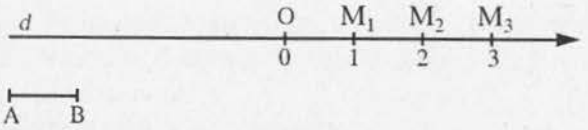
$\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{2^3}{}^2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^6}$

$\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{2^3}\underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{2^3} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^6}$

$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^6} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^6}$

Reprezentarea numerelor naturale pe o dreaptă

Axa numerelor este o dreaptă pe care am fixat o origine, un sens şi o unitate de măsură



Segmentul AB, cu lungimea egală cu distanţa dintre două puncte consecutive, se numeşte unitate de măsură.

NUMĂR PAR x se numeşte număr par, dacă există un număr natural n astfel încât

$x = 2n$

NUMĂR PRIM Orice număr natural diferit de 1, care are ca divizori numai pe 1 şi pe el însuşi; orice număr natural diferit de 1 care admite numai divizori improprii. Două numere naturale se numesc prime între ele, dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1. Orice întreg mai mare sau egal cu 2, admite cel puţin un divizor prim. Orice întreg mai mare sau egal cu 2, se poate scrie ca produs de numere prime naturale. Există o infinitate de numere prime naturale. Orice întreg relativ diferit de - 1, 0 sau 1, se poate scrie ca produs de numere prime naturale şi de o unitate.

Numere prime mai mici ca 420, determinate din forma $\lambda n + \mu$, unde λ este un produs de numere prime şi $\mu \in \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$:

n \ μ	1	7	11	13	17	19	23	29
0		7	11	13	17	19	23	29
1	31	37	41	43	47		53	59
2	61	67	71	73		79	83	89
3		97	101	103	107	109	113	
4		127	131		137	139		149
5	151	157		163	167		173	179
6	181		191	193	197	199		
7	211			223	227	229	233	239
8	241		251		257		263	269
9	271	277	281	283			293	
10		307	311	313	317			
11	331	337			347	349	353	359
12		367		373	379		383	389
13		397	401			409		419

NUMĂR RAȚIONAL Mulțimea tuturor fracțiilor $\frac{m}{n}$, echivalente cu o fracție dată $\frac{a}{b}$.

$A = \frac{a}{b}$

A este numărul rațional definit de $\frac{a}{b}$

$\frac{a}{b}$ este reprezentantul numărului rațional A.

$\mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor raționale

$\mathbb{Q}_+$ este mulțimea numerelor raționale pozitive.

Numerele raționale cu numitorul 1 pot fi luate în considerație ca numere întregi. În $\mathbb{Q}$ sunt valabile referitor la adunare și înmulțire aceleași reguli de calcul ca și pentru numere întregi (asociativitate, comutativitate ș.a.m.d)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Două numere raționale X și Y, notate $\frac{a}{b}$ și $\frac{m}{n}$, sau $-\frac{a}{b}$ și $-\frac{m}{n}$, sunt egale dacă fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{m}{n}$ sunt echivalente, adică $a \cdot n = b \cdot m$.

Egalitatea numerelor raționale are următoarele proprietăți:

1) $X = X$, $\forall X \in \mathbb{Q}$ (reflexivitate)

2) Dacă $X = Y$ atunci $Y = X$, $\forall X, Y \in \mathbb{Q}$, (simetrie)

3) Dacă $X = Y$ și $Y = Z$, atunci $X = Z$

$\forall X, Y, Z \in \mathbb{Q}$, (tranzitivitate)

Relația de egalitate este o relație de echivalență. Operațiile cu numere raționale au aceleași proprietăți ca operațiile cu numere întregi. Definim inversul unui număr

rațional diferit de zero, ca fiind $x^{-1} = \frac{1}{x}$ cu proprietatea că $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$$

Împărțirea a două numere raționale se poate defini și ca înmulțirea cu inversul:

$$x : y = \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$$

Ex.:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{6} = \frac{2}{3} : \left(\frac{4}{6}\right)^{-1} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{4}_{2}} = 1$$

$$\frac{5}{7} : \frac{10}{21} = \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{10}{21}\right)^{-1} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{10}_{2}} = \frac{3}{2}$$

Zero nu are invers.

Operații cu numere raționale reprezentate de fracții

1) Suma a doua numere raționale A și B, unde A este reprezentat de fracția $\frac{a}{b}$, B este reprezentat de fracția $\frac{c}{d}$, este un număr rațional S, reprezentat de fracția $\frac{ad + bc}{bd}$

Proprietăți:

a) comutativitate: $A + B = B + A$; $\forall A, B \in \mathbb{Q}$

b) asociativitate: $(A + B) + C = A + (B + C)$; $\forall A, B, C \in \mathbb{Q}$

c) element neutru: $A + 0 = 0 + A = A$; $\forall A \in \mathbb{Q}$

Ex.:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15}$$

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$

$\frac{10+3}{15}=\frac{3+10}{15}$

$\frac{13}{15}=\frac{13}{15}$

b) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)+\frac{2}{15}=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\right)$

$\frac{10+3}{15}+\frac{2}{15}=\frac{2}{3}+\frac{3+2}{15}$

$\frac{13}{15}+\frac{2}{15}=\frac{10}{15}+\frac{5}{15}$

$\frac{15}{15}=\frac{15}{15}$

c) $\frac{2}{3}+\frac{0}{1}=\frac{0}{1}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$\frac{1\cdot 2+3\cdot 0}{3}=\frac{3\cdot 0+1\cdot 2}{3}=\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

2) Diferenţa a două numere raţionale A şi B unde A este reprezentat de fracţia $\frac{a}{b}$, iar B este reprezentat de

fracţia $\frac{c}{d}$, este un număr raţional D, reprezentat de fracţia $\frac{ad-bc}{bd}$

Ex.:

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{10-3}{15}=\frac{7}{15}$$

3)Produsul unui număr raţional, reprezentat de o fracţie, cu un număr natural, este un număr raţional reprezentat de o fracţie care are ca numărător produsul dintre numărătorul fracţiei date şi numărul natural considerat, iar ca un numitor, numitorul fracţiei date.

$$m\cdot\frac{a}{b}=\frac{ma}{b}$$

Ex.:

$$5\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{7}$$

4) Produsul a două numere raţionale A şi B, reprezentate de fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$, este un număr raţional P, reprezentat de fracţia $\frac{ac}{bd}$.

Proprietăţi:

a) comutativitate: $A\cdot B=B\cdot A;\ \forall\ A,\ B\in\mathbb{Q}$

b) asociativitate: $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C);\ \forall\ A,\ B,\ C\in\mathbb{Q}$

c) element neutru: $A\cdot 1=1\cdot A=A;\ \forall\ A\in\mathbb{Q}$

d) distributivitatea înmulţirii faţă de adunare şi scădere:

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,$$
$$A\cdot(B-C)=A\cdot B-A\cdot C,\quad \forall\ A,\ B,\ C\in\mathbb{Q}$$

Ex.:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$$

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{3}$

$\frac{10}{21}=\frac{10}{21}$

b) $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{4}\right)$

$\frac{10}{21}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{28}$

$\frac{10}{84}=\frac{10}{84}$

c) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{5}{7}+\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{20+7}{28}=\frac{10}{21}+\frac{2}{12}$

$\frac{2\cdot 27}{3\cdot 28}=\frac{4\cdot 10+7\cdot 2}{3\cdot 7\cdot 4}$

$\frac{54}{84}=\frac{40+14}{8}$

$\frac{54}{84}=\frac{54}{84}$

d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{20-7}{28}=\frac{10}{21}-\frac{2}{12}$

$\frac{2\cdot 13}{3\cdot 28}=\frac{10\cdot 4-2\cdot 7}{84}$

$\frac{26}{84}=\frac{26}{84}$

5) Câtul între două numere raţionale A şi B reprezentate de fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ cu $c\neq 0$, este un număr Q reprezentat de fracţia $\frac{ad}{bc}$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Ex.:

$$\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{14}{15}$$

6) Mulţimea puterilor unui număr raţional $A\neq 0$, este mulţimea $\{A^0, A^1, A^2, A^3, \ldots\ldots, A^n, \ldots\ldots\}$, unde

$A^0=1$

$A^1=A$

$A^2=A\cdot A$

$A^3=A\cdot A\cdot A$

.

.

.

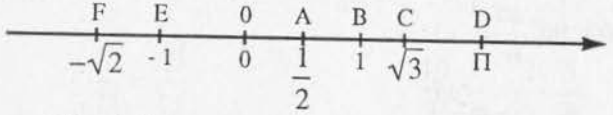
$A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\ldots\cdot A}_{n \text{ ori}}$

NUMERE REALE Numere care pot fi reprezentate prin numere zecimale finite sau infinite (periodice sau neperiodice). Mulţimea numerelor reale se notează cu $\mathbb{R}$. Deoarece orice număr raţional are o dezvoltare de fracţie zecimală periodică, dar pe deasupra există şi fracţii zecimale neperiodice, există precis mai multe numere reale decât raţionale;

$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

În general: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Fiecărui număr real i se asociază un punct pe axa numerelor.



Operaţiile definite pe mulţimea numerelor raţionale se extind şi la mulţimea numerelor reale.

NUMERE PITAGOREICE Trei numere naturale, pentru care $a^2 = b^2 + c^2$. Cu orice trei numere pitagoreice se poate construi un triunghi dreptunghic cu lungimile laturilor numere întregi (teorema lui Pitagora).

(3, 4, 5);	(21, 20, 29);
(5, 12, 13);	(9, 40, 41);
(15, 8, 17);	(35, 12, 37);
(7, 24, 25);	(11, 60, 61).

NUMITOR COMUN Numitorul comun a două fracţii $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$, este cel mai mic multiplu comun al numitorilor celor două fracţii. Dacă numitorii sunt numere prime între ele, atunci numitorul comun este produsul numitorilor.

$\frac{2}{5}$ şi $\frac{4}{3}$ devin $\frac{6}{15}$ şi $\frac{20}{15}$

$\frac{3}{6}$ şi $\frac{1}{15}$ devin $\frac{15}{30}$ şi $\frac{2}{30}$

OCTOGON Poligon cu opt laturi. Latura octogonului regulat în funcţie de raza R a cercului circumscris este: $l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ şi aria $A = 2\sqrt{2} \cdot R^2$

OMAR, Khayyan (c. 1040 - c. 1123), poet, om de ştiinţă şi filozof arab. În lucrarea sa, „Comentarii despre demonstraţiile problemelor de algebră şi almukabala", a clasificat ecuaţiile algebrice. A prezentat teoria paralelelor în „Comentarii despre dificultăţile din introducerile la cărţile lui Euclid". Tratatul „Dificultăţile aritmeticii" cuprinde procedeul de determinare a rădăcinilor de indice natural, din numere întregi.

OPERAŢII FUNDAMENTALE ALE ARITMETICII

Sunt: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea şi ridicarea la putere.

Operaţii de ordinul I — adunarea şi scăderea.

Operaţii de ordinul II — înmulţirea şi împărţirea.

Operaţii de ordinul III — ridicarea la putere.

Dacă o expresie conţine doar operaţii de acelaşi ordin, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise.

Dacă o expresie conţine operaţii de ordini diferite, se efectuează mai întâi operaţia de ordinul III, apoi cele de ordinul II şi în final cele de ordinul I.

Ex.:

a) $3 + 5 - 2 + 7 - 4 =$
$8 - 2 + 7 - 4 =$
$6 + 7 - 4 =$
$13 - 4 =$
9

b) $17 + 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 5 + 10 : 5 =$

$17 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 9 + 4 \cdot 5 + 10 : 5 =$

$17 + 12 - 18 + 20 + 2 =$

$29 - 18 + 20 + 2 =$

$11 + 20 + 2 =$

$31 + 2 =$

33

OPUS Număr care împreună cu altul au suma zero.

$a + (-a) = 0$

Ex.:

$7 + (-7) = 0 \Rightarrow -7$ este opusul lui 7

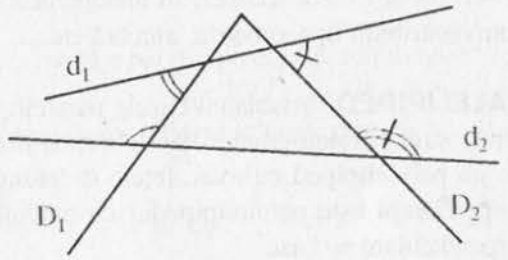
$(-7) + 7 = 0 \Rightarrow 7$ este opusul lui (-7).

ORIENTARE Un segment, o semidreaptă, o dreaptă sunt orientate, dacă punctele lor sunt parcurse într-o direcție precisă (sens). Pentru fiecare două puncte A și B este dată dinainte o relație: A se află înaintea lui B sau B se află înaintea lui A. Dacă A se află înaintea lui B și B se află înaintea lui C, atunci A se află înaintea lui C. Axioma ordonării afirmă că orice dreaptă este orientată sau i se poate atribui o orientare.

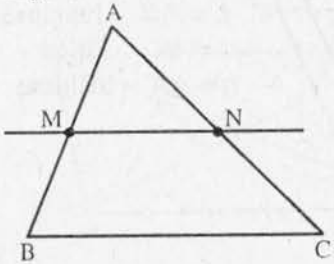
ORTOCENTRU Punctul de intersecție al înălțimilor unui triunghi.

ORTOGONAL În geometrie, sinonim cu perpendicular.

PARALELE Drepte situate în același plan și care nu se întâlnesc. Două drepte paralele cu a treia sunt paralele între ele. Două drepte perpendiculare pe o a treia sunt paralele. Dacă două drepte sunt paralele, orice dreaptă concurentă cu una dintre ele, este concurentă și cu cealaltă. Dacă secanta este perpendiculară pe una din drepte, ea este perpendiculară și pe cealaltă. Două drepte oarecare sunt tăiate de drepte paralele în segmente proporționale nu numai în lungimea lor, ci și în măsura lor și reciproc. Două drepte concurente D_1 și D_2 sunt antiparalele față de două drepte concurente d_1 și d_2, dacă în patrulaterul pe care-l formează, unghiurile opuse sunt suplementare.



Dreapta care conține mijlocul unei laturi AB a unui triunghi și este paralelă cu latura BC, va tăia latura AC în mijlocul său.

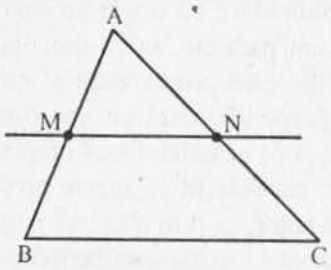


$[AM] \equiv [MB]$

$\Rightarrow [AN] \equiv [NC]$

$MN \parallel BC$

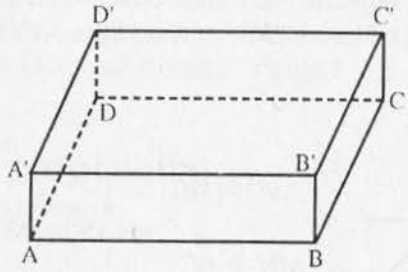
Dreapta care conţine mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralelă cu a treia.



$$[AM] \equiv [MB]$$
$$[AN] \equiv [NC]$$
$$\Rightarrow MN \parallel BC$$

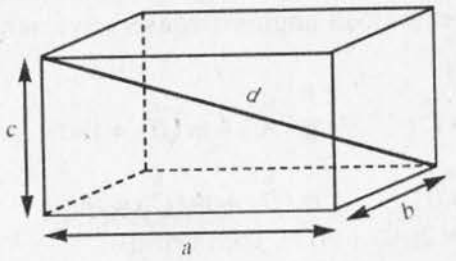
PASCAL, Blaise (1623 - 1662), matematician, fizician, scriitor şi filozof francez. În matematică a adus importante contribuţii în geometrie, algebră etc....

PARALELIPIPED Prisma cu bazele paralelograme. Toate feţele sunt paralelograme. Paralelipiped dreptunghic este un paralelipiped cu toate feţele dreptunghiuri. Paralelipiped drept este paralelipipedul cu muchiile laterale perpendiculare pe baze.



$L = AB$ - lungime
$l = BC$ - lăţime
$h = AA'$ - înălţime

O diagonală a paralelipipedului este segmentul de dreaptă care uneşte două vârfuri care nu sunt pe aceeaşi faţă.



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

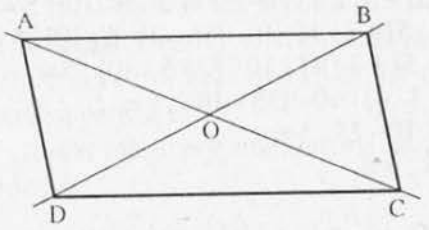
Aria totală a paralelipipedului dreptunghic:

$$A_t = 2(Ll + Lh + lh)$$

Volumul paralelipipedului dreptunghic:

$$V = L \cdot l \cdot h$$

PARALELOGRAM Patrulaterul convex care are laturile opuse paralele.



$$[OA] \equiv [OC]$$
$$[OB] \equiv [OD]$$

Într-un paralelogram diagonalele se intersectează în părţi congruente. Într-un paralelogram diagonalele au acelaşi mijloc.

Într-un patrulater laturile opuse sunt congruente două câte două.

$$[AB] \equiv [DC]$$
$$[AD] \equiv [BC]$$

Într-un patrulater, oricare două unghiuri opuse sunt congruente şi oricare două unghiuri consecutive sunt suplementare.

$$\hat{A} \equiv \hat{C}; \qquad m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^\circ$$

$$\hat{D} \equiv \hat{B}; \qquad m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$$

$\mathcal{P} = 2(AB + AD)$, (perimetrul)

$\mathcal{A}_{[ABCD]}$ = baza x înălţimea, (aria)

PARANTEZE

( ) = paranteze rotunde,
[ ] = paranteze drepte,
{ } = acolade.

Dacă o expresie conţine paranteze, se vor efectua mai întâi calculele din paranteze. Efectuarea începe cu calculele din parantezele rotunde, după care cele drepte devin rotunde, iar acoladele devin paranteze drepte.

Ex.:

$\{[(8 \cdot 2^2 - 4) : 7 + 2 \cdot 5] + 3 \cdot 2^2\} \cdot 10 - [(2^2 + 3) \cdot 5 - 10] : 5 =$
$= \{[(8 \cdot 4 - 4) : 7 + 2 \cdot 5] + 3 \cdot 4\} \cdot 10 - [(4 + 3) \cdot 5 - 10] : 5 =$
$= \{[(32 - 4) : 7 + 2 \cdot 5] + 3 \cdot 4\} \cdot 10 - (7 \cdot 5 - 10) : 5 =$
$= [(28 : 7 + 2 \cdot 5) + 3 \cdot 4] \cdot 10 - (35 - 10) : 5 =$
$= [(4 + 10) + 3 \cdot 4] \cdot 10 - 25 : 5 =$
$= (14 + 12) \cdot 10 - 25 : 5 =$
$= 26 \cdot 10 - 25 : 5 =$
$= 260 - 5 =$
$= 255$

PARTE ÎNTREAGĂ Prin partea întreagă a numărului raţional x, notată $[x]$, înţelegem cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

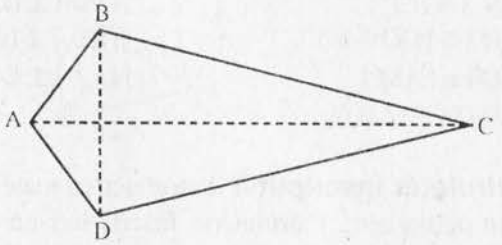
$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Ex.:

$[2,71] = 2$ $\qquad$ $[-7,97] = -8$
$[3,94] = 3$ $\qquad$ $[-4,5] = -5$
$[3] = 3$ $\qquad$ $[0] = 0$

$$\left[5\frac{7}{3}\right] = 5$$

PATRULATER Poligon cu patru laturi.



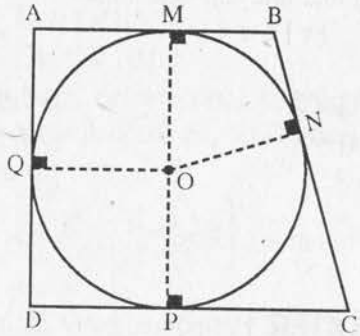
$[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$ laturile patrulaterului
A, B, C, D vârfurile patrulaterului
$[AC]$, $[BD]$ diagonalele patrulaterului

Patrulater convex este patrulaterul în care oricare latură a sa are cele două vârfuri nesituate pe ea, de aceeaşi parte a sa.

Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este 360° :

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360^\circ$$

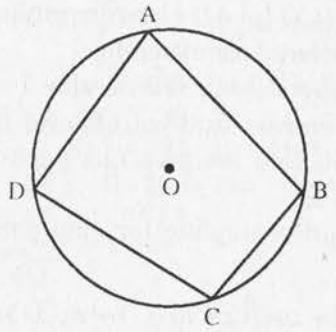
Patrulater circumscris unui cerc Patrulater ale cărui laturi sunt tangente la cerc.



$[BM] \equiv [BN]$
$[CN] \equiv [CP]$
$[DP] \equiv [DQ]$
$[AQ] \equiv [AM]$

$[OM] \perp [AB]$
$[ON] \perp [BC]$
$[OP] \perp [CD]$
$[OQ] \perp [AD]$

Patrulater inscriptibil Patrulater cu toate vârfurile aşezate pe un cerc. Patrulaterul înscris într-un cerc este patrulater convex.

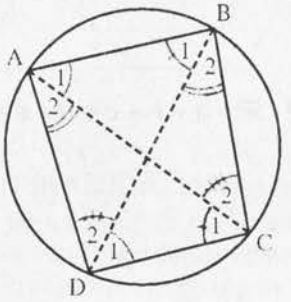


Un patrulater convex înscris într-un cerc are unghiurile opuse suplementare:

$$m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$$

$$m(\hat{D}) + m(\hat{B}) = 180^\circ$$

Dacă un patrulater este înscris într-un cerc, diagonalele sale formează unghiuri congruente cu două laturi opuse ale patrulaterului.



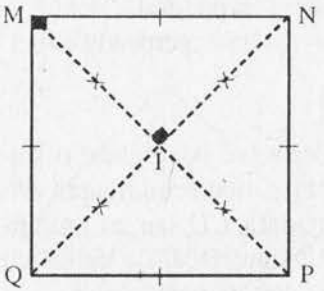
$m(\hat{A}_1) = m(\hat{D}_1)$

$m(\hat{A}_2) = m(\hat{B}_2)$

$m(\hat{B}_1) = m(\hat{C}_1)$

$m(\hat{C}_2) = m(\hat{D}_2)$

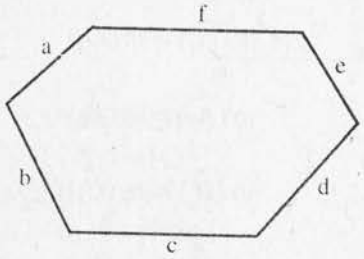
PĂTRAT Un dreptunghi care are două laturi consecutive congruente, sau un romb care are un unghi drept.



$[MN] \equiv [NP] \equiv [PQ] \equiv [QM]$
$m(\widehat{M}) = 90^\circ$
$[MI] \equiv [IP] \equiv [IN] \equiv [QI]$
$\mathcal{P} = 4\ MN$, (perimetrul)
$\mathcal{A}_{[MNPQ]} = MN^2$, (aria pătratului)

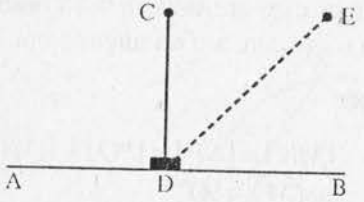
PEANO, Giuseppe (1858 - 1932), matematician italian. Profesor universitar la Torino. În „Principiile aritmeticii" a reuşit să realizeze axiomatizarea numerelor naturale. Este unul din creatorii limbajului simbolic al logicii prin lucrarea „Formular matematic".

PERIMETRU Lungimea liniei de delimitare a unei figuri. La un poligon este suma laturilor sale.



$\mathcal{P} = a + b + c + d + e + f$

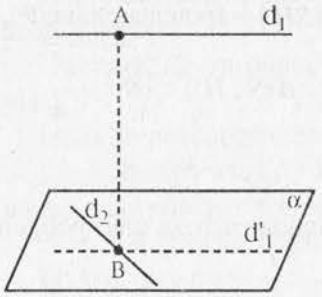
PERPENDICULARĂ O semidreaptă CD care face cu o dreaptă ADB, două unghiuri adiacente congruente.



D = piciorul perpendicularei

Dintr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură perpendiculară pe dreaptă. Orice semidreaptă DE care nu coincide cu perpendiculara CD sau cu prelungirea ei, se numeşte oblică. Unghiul făcut de oblică cu AB este mai mic sau mai mare decât un unghi drept.

Perpendiculara comună la două drepte O dreaptă perpendiculară pe două drepte care nu sunt situate în acelaşi plan.



$d_2 \subset \alpha$
$\alpha \parallel d_1$
$d_1' = pr_\alpha d_1$
$d_2 \cap d_1' = \{ B \}$
$A \in d_1$
$B = pr\ A$

AB = perpendiculara comună a dreptelor d_1 şi d_2.

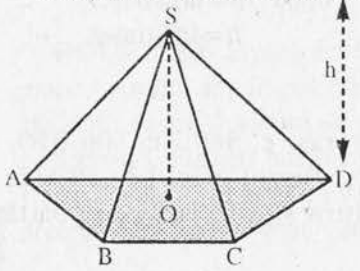
PIRAMIDĂ Corp mărginit de o suprafaţă piramidală şi de un poligon plan numit bază. Suprafaţa piramidală este suprafaţa determinată prin unirea tuturor vârfurilor poligonului plan, cu un punct exterior numit vârful piramidei.

Faţa laterală a piramidei este un triunghi cu un vârf în vârful piramidei şi latura opusă, o latură a poligonului de bază.

Muchia laterală este un segment ce uneşte vârful piramidei cu un vârf al bazei.

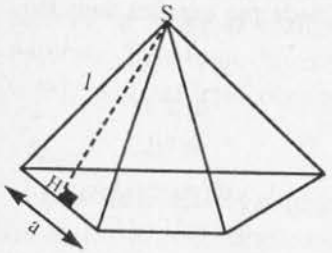
Muchiile de la bază sunt laturile poligonului de bază.

Înălţimea este distanţa de la vârf la planul bazei.



S = vârful piramidei
$[SA]$ = muchie laterală
$[AB]$ = o muchie a bazei
$[SO]$ = înălţime

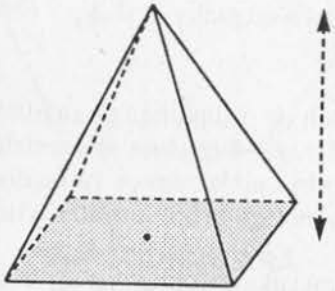
Apotema piramidei este înălțimea unei fețe.



$[SH]$ = apotema piramidei,

$$d(S, H) = \sqrt{l^2 - \frac{a^2}{4}}$$

Piramida regulată este piramida cu baza unui poligon regulat.



Piramidă patrulateră regulată.

Aria laterală este suma ariilor fețelor laterale.
Aria laterală a piramidei regulate:

$$A_{lat} = \frac{a_p \cdot p}{2}$$

unde p = perimetrul bazei
ap = apotema

Volumul: $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

unde Ab = aria bazei
h = înălțimea

PITAGORA (Pythagoras, c. 560 - c. 500 îHr), matematician, om politic și filozof grec. I se atribuie descoperirea tablei înmulțirii și a teoriei ce-i poartă numele.

PLAN Suprafață care conține o dată cu două puncte ale sale și dreapta care le unește. Este una din noțiunile de bază ale geometriei în spațiu.

Planul este determinat de trei puncte care nu se află pe aceeași dreaptă.

O dreaptă și un punct exterior determină un singur plan.

Două drepte concurente determină un singur plan.

Dacă două puncte de pe o dreaptă se află într-un plan, atunci toate punctele dreptei se află în acel plan.

Două plane se intersectează reciproc după o dreaptă.

Planele care nu au nici un punct comun sunt paralele.

Un plan poate fi descompus prin orice dreaptă aflată pe el, în două semiplane.

Poziţiile relative a trei plane:

Există trei plane care au o dreaptă comună și numai una;

Există trei plane care au un punct comun și numai unul;

Printr-un punct exterior unui plan, trece un singur plan paralel cu el;

Două plane paralele cu al treilea sunt paralele între ele;

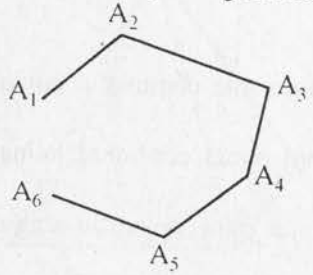
Dacă două plane sunt paralele, orice plan care intersectează pe primul îl intersectează și pe al doilea.

POLIEDRU Figură geometrică mărginită de porțiuni plane, numite fețele poliedrului. Fețele sunt poligoane ale căror laturi și vârfuri se numesc muchiile și vârfurile poliedrului. Fiecare muchie este comună la două fețe și fiecare vârf este comun la cel puțin trei fețe. Orice dreaptă care unește două vârfuri nesituate pe aceeași față

se numeşte diagonală a poliedrului. Două feţe alăturate determină un unghi diedru al poliedrului. Un poliedru este regulat, dacă toate feţele sunt poligoane regulate congruente şi dacă toate unghiurile diedre sunt congruente. Cel mai simplu poliedru este tetraedrul. El are patru feţe, toate triunghiuri. Se consideră două mari familii de poliedre: prismele şi piramidele.

POLIGON Linie poligonală închisă, în care numai laturile închise au câte un punct comun.

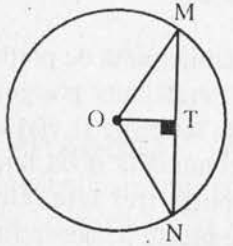
Linie poligonală - o reuniune de segmente de forma $[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup [A_3A_4] \cup \ldots \cup [A_{n-1}\ A_n]$, care nu sunt unul în prelungirea celuilalt.



Poligon convex - un poligon în care toate vârfurile nesituate pe o latură se află de aceeaşi parte a acesteia. Suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este:

$$S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Poligon regulat - un poligon convex cu toate laturile congruente şi toate unghiurile congruente. Orice poligon regulat se poate înscrie într-un cerc.



$MN = l_n$ (latura poligonului regulat cu n laturi)

$[OT] \perp [MN]$

$[OT]$ = apotema poligonului regulat

$$l_n = 2R \sin\frac{180^\circ}{n}$$

$$a_n = R \cos\frac{180^\circ}{n}$$

$l_3 = R\sqrt{3}$

$a_3 = \frac{R}{2}$, (triunghi echilateral înscris în cerc);

$l_4 = R\sqrt{2}$

$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, (pătrat înscris în cerc);

$l_6 = R$

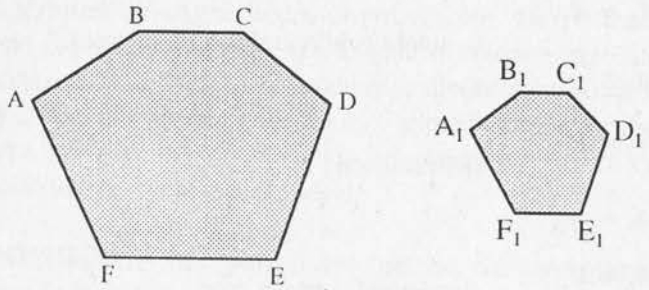
$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, (hexagon înscris în cerc);

Lungimea laturilor unui poligon se numeşte perimetru. După numărul unghiurilor poligonul se numeşte:

triunghi	—	trei unghiuri;
patrulater	—	patru unghiuri;
pentagon	—	cinci unghiuri;
hexagon	—	şase unghiuri;
heptagon	—	şapte unghiuri;
octogon	—	opt unghiuri;
decagon	—	zece unghiuri;
dodecagon	—	douăsprezece unghiuri.

Orice dreaptă care uneşte două vârfuri consecutive se numeşte diagonală. Dacă toate vârfurile unui poligon se găsesc pe un cerc, poligonul se numeşte înscris în cerc. Dacă toate laturile unui poligon sunt tangente la un cerc, poligonul se numeşte circumscris cercului.

Două poligoane cu acelaşi număr de laturi se numesc asemenea dacă unghiurile sunt două câte două congruente şi laturile analoage sunt proporţionale.



$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A_1$ $\quad$ $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B_1$

$\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C_1$ $\quad$ $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle D_1$

$\sphericalangle E \equiv \sphericalangle E_1$ $\quad$ $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle F_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EF}{E_1F_1} = \frac{FA}{F_1A_1}$$

Două poligoane asemenea se pot descompune în triunghiuri două câte două asemenea.

POLINOM O expresie care este un monom sau o sumă de monoame. Termenii polinomului sânt monoamele a căror sumă formează polinomul. Forma canonică a unui polinom este forma în care monoamele sunt scrise în ordinea descrescătoare a gradelor.

$P(X) = 2X^2 + 3X - 4$

$P(X, Y) = 3X^2 + 4XY - Y^2 + 2X - 3Y + 4$

0 este polinomul nul.

Binom = polinom cu doi termeni.

Trinom = polinom cu trei termeni.

Dacă în P(X) înlocuim litera X cu valoarea *a*, spunem că

P(*a*) este valoarea polinomului pentru X = *a*.

Dacă:

$P(X) = 2X^2 + 8X - 4$

Valoarea pentru $X = 2$, va fi $P(2) = 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 4$

$= 8 + 16 - 4$

$= 24 - 4$

$= 20$

Reducerea termenilor asemenea este adunarea termenilor asemenea.

Polinom nul - polinomul cu toţi coeficienţii zero. Gradul unui polinom este gradul cel mai mare dintre gradele termenilor formei canonice a polinomului considerat.

$P(X, Y) = -5X^2Y^2 + 7XY^2 - 4X - 3Y + 7$

$\text{grad } P(X, Y) = \text{grad}(-5X^2Y^2) = 2 + 2 = 4$

Gradul unui polinom în raport cu un grup de litere, respectiv cu o literă, este gradul cel mai mare dintre gradele termenilor formei canonice a polinomului considerat, în raport cu grupul de litere dat, respectiv cu litera dată.

Operaţii:

1) Suma a două polinoame este un polinom obţinut făcând suma termenilor şi reducând termenii asemenea.

$(5X + 6Y - 7) + (X^2 - 7X + 4Y + 2) = X^2 - 2X + 10Y - 5$

2) Diferenţa dintre două polinoame este un polinom obţinut din adunarea unui polinom cu opusul celui de al doilea.

$(X^2 + Y^2 - 2Y + 3X - 4) - (X^2 - 2Y^2 + 4X - 5Y - 7) =$

$= X^2 + Y^2 - 2Y + 3X - 4 - X^2 + 2Y^2 - 4X + 5Y + 7 =$

$= 3Y^2 - X + 3Y + 3$

3) Produsul unui monom cu un polinom este un polinom obţinut făcând suma tuturor produselor dintre monom şi fiecare termen al polinomului.

$$2X^2Y(XY - 3X + 4Y) = 2X^3Y^2 - 6X^3Y + 8X^2Y^2$$

4) Un polinom se împarte la un monom, diferit de zero, dacă fiecare termen al polinomului se împarte la monomul considerat.

$$\frac{3X^4Y^3 + 2X^4Y^2 - 5X^3Y^2 + X^2Y^2 - X^2Y}{X^2Y} =$$

$$= \frac{3X^4Y^3}{X^2Y} + \frac{2X^4Y^2}{X^2Y} - \frac{5X^3Y^2}{X^2Y} + \frac{X^2Y^2}{X^2Y} - \frac{X^2Y}{X^2Y} =$$

$$= 3X^2Y^2 + 2X^2Y - 5XY + Y - 1$$

Suma coeficienţilor unui polinom este P(1).

$P(X) = 5X^4 + 3X^3 - 2X^2 + 4X - 5$

$P(1) = 5 + 3 - 2 + 4 - 5 = 5$

5) Produsul a două polinoame este un polinom obţinut prin înmulţirea fiecărui termen al primului polinom cu fiecare termen al celui de-al doilea polinom şi reducerea termenilor asemenea.

$$(X - 2) \cdot (X^3 - 4X^2 + 5X + 1) =$$
$$= X^4 - 4X^3 + 5X^2 + X - 2X^3 + 8X^2 - 10X - 2 =$$
$$= X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 9X - 2$$

Pentru polinomul: $P(X) = 2X^3 + X^2 - 3X + 4$

Funcţie polinomială este funcţia $p(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de legea $p(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 4$

6) Împărţirea polinoamelor: pentru polinoamele P(X) de gradul *m* şi Q(X) de gradul *n*, există un polinom C(X) şi un polinom R(X) astfel încât:

$P(X) = Q(X) \cdot C(X) + R(X)$, unde gradul lui R(X) este mai mic decât *n*.

P(X)= deâmpărţitul,
Q(X)= împărţitorul,
C(X)= câtul,
R(X)= restul.

Teorema împărţirii cu rest se mai poate scrie şi sub forma:

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = C(X) + \frac{R(X)}{Q(X)}$$

$$\begin{array}{l|l} X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1 & X^2 - X + 1 \\ \hline -X^4 + X^3 - X^2 & X^2 - 2X - 1 \\ \hline -2X^3 + X^2 - X + 1 & \\ 2X^3 - 2X^2 + 2X & \\ \hline -X^2 + X + 1 & \\ X^2 - X + 1 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$P(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1$ (deâmpărţitul)
$Q(X) = X^2 - X + 1$ (împăţitorul)
$C(X) = X^2 - 2X - 1$ (câtul)
$R(X) = 2$ (restul)

P(X) este divizibil cu Q(X), adică:

Q(X) divide pe P(X), dacă R(X) este polinomul nul;

$P(X) = Q(X) \cdot C(X)$.

Se notează: $P(X) \vdots Q(X)$

sau

$Q(X) \mid P(X)$.

În acest caz: P(X) se mai numeşte şi multiplu polinomului Q(X).

Polinom reductibil este polinomul care poate fi scris ca produs de polinoame de grade mai mari sau egale cu 1.

$P(X)= Q(X) \cdot C(X)$, cu grad $Q \geq 1$ şi grad $R \geq 1$.

Polinom ireductibil este un polinom care nu este reductibil.

Polinomul nul şi polinoamele constante sunt ireductibile.

A descompune un polinom în factori înseamnă a-l scrie sub forma unui produs de polinoame ireductibile.

Metodele folosite sunt:

1) Metoda scoaterii factorului comun
2) Metoda identităţilor
3) Metoda grupării termenilor
4) Separarea unui pătrat perfect
5) Metode combinate

1) $2a(3x-2y)-3b(2y-3x)+c(3x-2y)=$
$=(3x-2y)\cdot(2a+3b+c)$

2) $9x^6+4y^4+25z^2+12x^3y^2-30x^3z-20y^2z=$
$=(3x^3)^2+(2y^2)^2+(5z)^2+2\cdot(3x^3)\cdot(2y^2)-$
$-2(3x^3)\cdot(5z)-2(2y^2)\cdot(5z)=$
$=(3x^3+2y^2-5z)^2$

3) $a^7-a^6+a^5-a^4+a^3-a^2+a-1=$
$=a^6(a-1)+a^4(a-1)+a^2(a-1)+(a-1)=$
$=(a-1)(a^6+a^4+a^2+1)$

4) $4a^2x^2+9b^4-12ab^2x-25c^4=\left[(2ax)^2-2(2ax)\cdot\right.$
$\left.\cdot(3b^2)+(3b^2)^2\right]-(5c^2)^2=(2ax-3b^2)^2-(5c^2)^2=$
$=(2ax-3b^2+5c^2)(2ax-3b^2-5c^2)$

5) $6a^3-12a^2b+6ab^2-6ac^2=6a(a^2-2ab+b^2-c^2)=$
$=6a\left[(a-b)^2-c^2\right]=6a(a-b-c)(a-b+c)$

Teorema împărţirii unui polinom la X - a:

$P(X) = (X - a)\,Q(X)+R$, unde $R = P(a)$.

Restul împărţirii unui polinom P(X) la X - a este $P(a)$.

Ex.:

restul împărţirii polinomului

$P(X) = 3X^4 - X^3 + 2X^2 - 4X + 5$ la X - 1 este

$R = P(1) = 3 - 1 + 2 - 4 + 5 = 5$

Un polinom P(X) este divizibil cu binomul X - a dacă şi numai dacă $P(a) = 0$.

Ex.:

$P(X) = 4X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 2X - 1$

Restul împărţirii lui P(X) la X - 1 va fi

$P(1) = 4 - 3 + 2 - 2 - 1 = 0$

Deci: $X - 1 \mid P(X)$

D(X) este cel mai mare divizor comun al polinoamelor P(X) şi Q(X) dacă el este divizor al lui P(X) şi al lui Q(X). şi dacă orice divizor al lui P(X) şi Q(X) este divizor şi al lui D(X).

Pentru aflarea celui mai mare divizor comun a două polinoame se foloseşte algoritmul lui Euclid.

M(X) este cel mai mic multiplu comun al polinoamelor P(X) şi Q(X) dacă P(X) şi Q(X) divid polinomul M(X) şi dacă orice polinom R(X) care se divide cu P(X) şi Q(X) se divide şi cu M(X);

$$M(X) = \frac{P(X) \cdot Q(X)}{D(X)}$$

Ex.:

$P(X) = (X+2)^4(X-1)^3(X^2+1)$

$Q(X) = (X+2)^2(X-1)(X^2+X+1)$

$D(X) = (X+2)^2(X-1)$

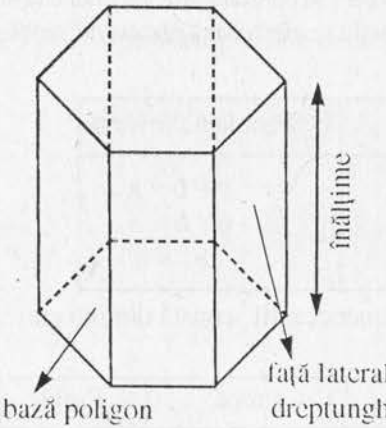
$$M(X) = \frac{(X+2)^4(X-1)^3(X^2+1)\cancel{(X+2)^2(X-1)}(x^2+X+1)}{\cancel{(X+2)^2(X-1)}}$$

$M(X) = (X+2)^4(X-1)^3(X^2+1)(X^2+X+1)$

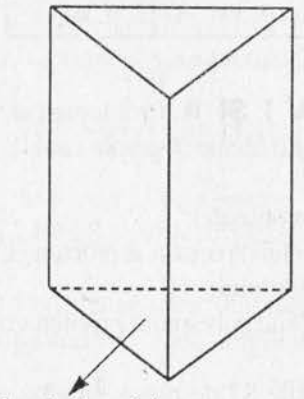
Dacă P(X) şi Q(X) sunt descompuse în factori, cel mai mare divizor comun este produsul factorilor comuni la puterea cea mai mică, iar cel mai mic multiplu comun este produsul factorilor comuni şi necomuni la puterea cea mai mare.

POPOVICIU, Tiberiu (1906 - 1975), matematician român. Profesor la universităţile din Cluj şi Iaşi. Membru al Academiei Române. Lucrări de algebră şi teoria numerelor.

PRISMĂ Mulţimea punctelor interioare reunită cu suprafaţa prismei. Suprafaţă prismatică — locul geometric al punctelor dreptelor paralele cu o dreaptă *d*, care au un punct comun cu poligonul director. Intersectând suprafaţa prismatică cu două plane paralele se obţin două poligoane cu laturile paralele şi congruente. Aria laterală a prismei este suma ariilor feţelor laterale. Aria totală a prismei este suma dintre aria laterală şi ariile bazelor. Prismă dreaptă este prisma ale cărei muchii laterale sunt perpendiculare pe planele bazelor. Feţele laterale sunt dreptunghiuri.



Prisma hexagonală dreaptă



Prisma triunghiulară dreaptă

Înălţimea prismei este distanţa dintre baze.

Volumul prismei este produsul dintre aria bazei şi înălţime.

$$V = A_{bazei} \cdot h$$

PROBĂ Metodă prin care se constată justeţea unui calcul.

a) Proba unui calcul aritmetic se efectuează rezolvând problema inversă:

Problema	Problema inversă
$a - b = c$	$c + b = a$
$a : b = c$	$c \cdot b = a$
$\sqrt{a} = b$	$b^2 = a$

b) Proba pentru soluţia unei ecuaţii, constă din înlocuirea soluţiilor aflate.

Ecuaţie	Soluţie	Probă	Eroare
$2x + 5 = 15$	5	$2 \cdot 5 + 5 = 15$	nu
$2x + 3 = 4$	0	$2 \cdot 0 + 3 = 3$	da

PROBLEME DE GRADUL I ŞI II Probleme care conduc la rezolvarea unor ecuaţii sau sisteme de gradul I sau II.

Etapele rezolvării:

a) stabilirea necunoscutelor problemei;

b) formarea ecuaţiei sau sistemului de ecuaţii al problemei;

c) rezolvarea ecuaţiei sau sistemului;

d) cercetarea dacă soluţiile găsite corespund problemei;

e) verificarea soluţiilor.

1) Un strungar a lucrat în trei zile 87 de piese. În ziua a doua a lucrat cu o treime mai multe piese ca în prima zi, iar în ziua a treia, cu 10 piese mai mult decât în ziua a doua. Să se afle câte piese a lucrat zilnic ?

a) x = numărul pieselor lucrate în prima zi

$x + \frac{x}{3}$ = numărul pieselor lucrate în ziua a doua

$x + \frac{x}{3} + 10$ = numărul pieselor lucrate în ziua a treia

b) $x + \left(x + \frac{x}{3}\right) + \left(x + \frac{x}{3} + 10\right) = 87$

c) $3x + \frac{2x}{3} = 87 - 10$

$9x + 2x = 3 \cdot 77$

$11x = 3 \cdot 77$

$x = \frac{3 \cdot \cancel{77}^{7}}{\cancel{11}} = 21$

d) În prima zi s-au produs 21 piese

În a doua zi s-au produs $21 + \frac{21}{3} = 21 + 7 = 28$ piese

În a treia zi s-au produs 28 + 10 = 38 piese

e) 21 + 28 + 38 = 87 piese

2) Perimetrul unui dreptunghi este 410 cm. Să se determine aria lui, dacă lungimea întrece cu 65 cm lăţimea.

a) L = lungimea dreptunghiului

l = lăţimea dreptunghiului

b) $\begin{cases} 2L + 2l = 410 \\ L = l + 65 \end{cases}$

c) $\begin{cases} L+l=205 \\ L=l+65 \end{cases} \Leftrightarrow l+65+l=205 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2l=205-65 \Leftrightarrow l=\frac{140}{2}$

$l=70$ cm

d) $L=70+65=135$ cm

$A=70\cdot 135=9450$ cm^2

e) $2L+2l=2\cdot 135+2\cdot 70=270+140=410$ cm

PROCENT (%) Fracţiile cu numitorul 100 se citesc sutimi sau procente.

$\frac{a}{100}$ se scrie a % şi se citeşte „*a* la sută" sau „*a* procente".

$\frac{15}{100}$ se scrie 15% şi se citeşte „15 la sută" sau „15 procente".

Dacă avem un număr *n*, *p* % din el va fi: $x=\frac{p}{100}\cdot n=\frac{np}{100}$

Ex.:

40 % din 800 lei vor fi $x=\frac{40}{100}\cdot 800=320$ lei

Dacă se cunoaşte că *p* % dintr-un număr este *a* atunci numărul va fi: $\frac{p}{100}\cdot x=a,\quad x=\frac{100a}{p}$

Ex.: Să se determine un număr dacă 30 % din el este 600.

$\frac{30}{100}x=600 \Rightarrow x=\frac{600\cdot 100}{30}=\frac{6000}{3}=2000$

sau

$$\begin{array}{l} \frac{30}{100} \cdots\cdots 600 \\ \frac{100}{100} \cdots\cdots x \end{array}$$

$$x=\frac{600\cdot\frac{100}{100}}{\frac{30}{100}}=\frac{600\cdot 100}{30}=\frac{6000}{3}=2000$$

Aflarea raportului procentual dintr-un număr: $x=\frac{p}{100}\cdot n$

Ex.: Cât la sută din 200 este 10 ?

$10=\frac{p}{100}\cdot 200$

$p=\frac{100\cdot 10}{200}$

$p=5$

Deci 10 reprezintă 5 % din 200.

Aflarea procentului din procent:

În anul 1981 preţul de cost al unui strung a fost redus cu 3,5%, iar în 1982 a fost redus din nou cu 8,8%. Cât la sută din preţul de cost iniţial reprezintă preţul de cost al strungului după a doua reducere de preţ ?

După prima reducere din anul 1981, noul preţ de cost reprezintă 100 - 3,5 = 96,5% din preţul de cost din 1980.

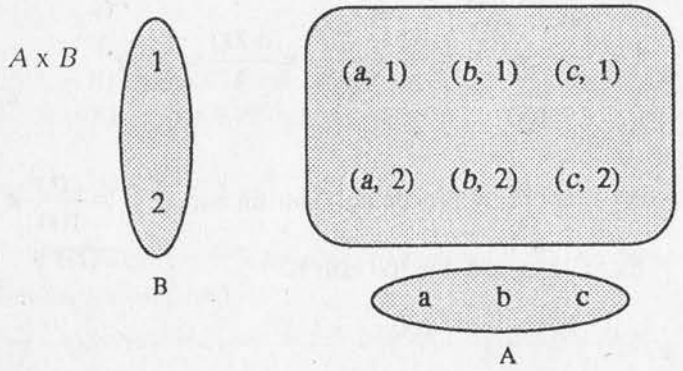
În 1982 s-a redus cu 8,8% din 96,5% adică:

$96,5\cdot\frac{8,8}{100}=8,5\%$

Ultimul preţ de cost va fi: 96,5 - 8,5 = 88%

PRODUS CARTEZIAN a două mulţimi. Mulţimea tuturor perechilor ordonate de două elemente, luate primul din prima mulţime şi al doilea din a doua.

$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ şi } y \in B\}$



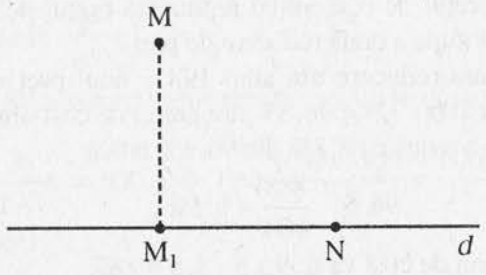
$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 3, 6\}$

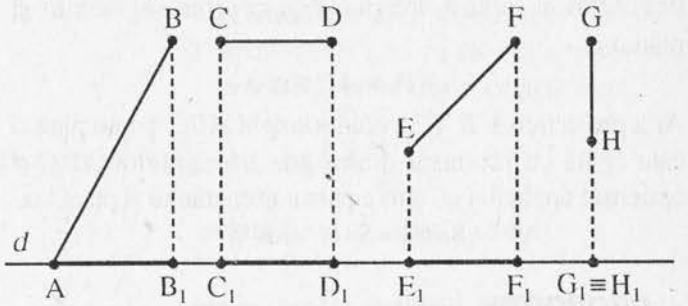
$A \times B = \{(2,1), (2,3), (2,6), (4,1), (4,3), (4,6), (6,1), (6,3), (6,6)\}$

$B \times A = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

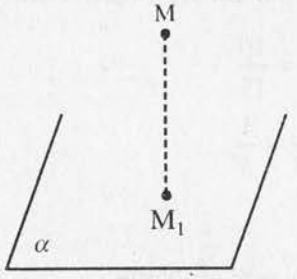
PROIECŢII ORTOGONALE Proiecţia ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe acea dreaptă.



Proiecţia unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.

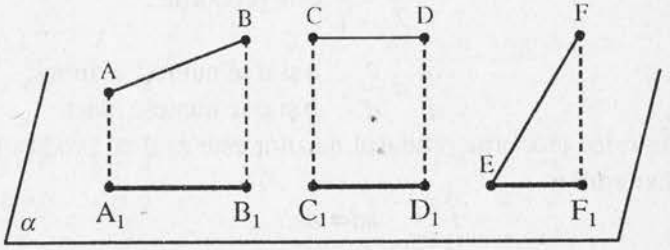


Lungimea proiecţiei unui segment pe o dreaptă este cel mult egală cu lungimea segmentului. Proiecţia ortogonală a unui punct M pe un plan este piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe plan.



$[MM'] \perp \alpha$

Proiecţia unui segment pe un plan este tot un segment sau un punct:



Lungimea proiecției unui segment pe un plan este egală cu produsul dintre lungimea segmentului și cosinusul unghiului φ, dintre dreapta d ce conține segmentul și planul α.

$$A_1B_1 = AB\cos\varphi$$

Aria proiecției $A'B'C'$ a unui triunghi ABC pe un plan α este egală cu produsul dintre aria triunghiului ABC și cosinusul unghiului φ, dintre planul triunghiului și planul α.

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$$

PROPORȚIE Egalitate a două rapoarte.

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \quad \text{cu} \quad \begin{matrix} b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{matrix}$$

Prin amplificarea sau simplificarea unui raport și punerea semnului de egalitate între raportul dat și rapoartele astfel realizate se obțin proporții: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

$$\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

O proporție are patru termeni.

$\frac{10}{2} = 5$ nu este proporție

$\frac{10}{2} = \frac{5}{1}$ este proporție

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a și d se numesc extremi;
b și c se numesc mezi.

În orice proporție produsul mezilor este egal cu produsul extremilor:

$$ad = bc.$$

$a = \frac{b \cdot c}{d}$ $\Rightarrow$ un extrem este egal cu câtul dintre produsul mezilor și celălalt extrem.

$b = \frac{a \cdot d}{c}$ $\Rightarrow$ un mez este egal cu câtul dintre produsul extremilor și celălalt mez.

Proporții derivate obținute din $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, (schimbarea mezilor între ei);

$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, (schimbarea extremilor între ei);

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, (inversarea rapoartelor).

$\frac{am}{bm} = \frac{c}{d}$ $\qquad$ $\frac{am}{b} = \frac{cm}{d}$

$\frac{a}{b} = \frac{cm}{dm}$ $\qquad$ $\frac{a}{bm} = \frac{c}{dm}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$ $\qquad$ $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ $\qquad$ $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$

$\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ $\qquad$ $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ $\qquad$ $\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$

Ex.:

$$\frac{2}{5}=\frac{6}{15} \qquad \frac{2\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{8}{20}=\frac{6}{15}$$

$$\frac{2}{6}=\frac{5}{15} \qquad \frac{2}{5}=\frac{4\cdot 6}{4\cdot 15}=\frac{24}{60}$$

$$\frac{15}{5}=\frac{6}{2} \qquad \frac{2\cdot 4}{5}=\frac{6\cdot 4}{15} \Rightarrow \frac{8}{5}=\frac{24}{15}$$

$$\frac{5}{2}=\frac{15}{6} \qquad \frac{2}{4\cdot 5}=\frac{6}{4\cdot 15} \Rightarrow \frac{2}{20}=\frac{6}{60}$$

$$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{2+6}{5+15}=\frac{6-2}{15-5} \Rightarrow \frac{2}{5}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$$

$$\frac{2}{2+5}=\frac{6}{6+15} \Rightarrow \frac{2}{7}=\frac{6}{21}$$

$$\frac{2}{5-2}=\frac{6}{15-6} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{6}{9}$$

PROPORȚIONALITATE Proprietate a două mărimi de a fi proporționale (corespunzătoare unor proporții). Proporționalitatea directă se stabilește între două mulțimi finite de numere, dacă se poate forma un șir de rapoarte egale, diferite de zero, astfel încât mulțimea numărătorilor rapoartelor să fie una din mulțimi, iar mulțimea numitorilor rapoartelor să fie cealaltă mulțime.

$$\{4, 6, 8\} \Rightarrow \frac{4}{12}=\frac{6}{18}=\frac{8}{24}$$

$$\{12, 18, 24\}$$

Proporționalitatea inversă se stabilește între două mulțimi

finite de numere, dacă se poate forma un șir de produse egale, diferite de zero, astfel încât mulțimea primilor factori ai produselor să fie una din mulțimi, iar mulțimea celorlalți factori ai produselor să fie cealaltă mulțime.

PROPOZIȚIE Enunț despre care știm că este sau adevărat sau fals, însă nu și una și alta simultan.

Propoziții adevărate sunt propoziții care exprimă un adevăr. Propoziții false sunt propoziții care exprimă un neadevăr.

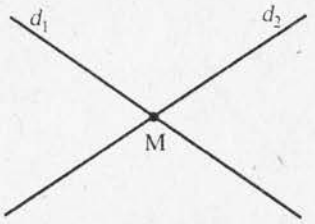
Ex.: $4 + 5 = 9$, propoziție adevărată.

$4 + 5 = 12$, propoziție falsă.

Adevărul se notează cu A sau cu 1 și el este valoarea logică a unei propoziții adevărate. Falsul se notează cu F sau cu 0 și este valoarea logică a unei propoziții false.

PTOLEMEU, Claudiu (Claudios Ptolemaios) (c. 90 - c. 168), astronom, matematician și geograf grec din Alexandria. În domeniul matematicii a adus importante contribuții în trigonometrie.

PUNCT Noțiune de bază a geometriei plane și în spațiu. Se notează cu litere mari: A, B, C.... Numele vine de la latinescul *punctum* = înțepătură. Intersecția a două drepte este un punct.



$d_1 \cap d_2 = \{M\}$

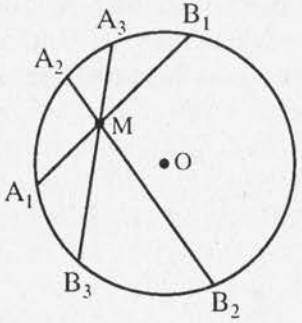
Din sistemul de axiome al geometriei euclidiene se reţin:
1. Două puncte determină numai o dreaptă;
2. Trei puncte din spaţiu care nu se află pe aceeaşi dreaptă determină numai un plan.
3. Dacă trei puncte sunt colineare, atunci unul se află între celelalte două.

PUNCTE COLINEARE Puncte care aparţin aceleeaşi drepte.

PUTEREA UNUI NUMĂR NATURAL v. NUMĂR NATURAL.

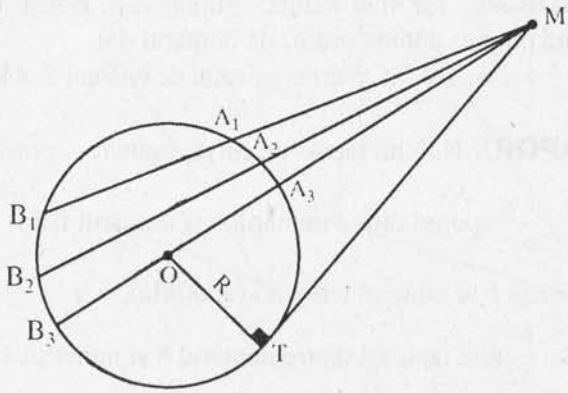
PUTEREA UNUI PUNCT FAŢĂ DE UN CERC

1) Puterea unui punct interior faţă de un cerc este produsul mărimii segmentelor determinate de punct pe o coardă.



$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = MA_3 \cdot MB_3$

2) Puterea unui punct exterior faţă de un cerc este produsul mărimii segmentelor determinate de punct şi de punctele în care o dreaptă ce trece prin el, intersectează cercul.



$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = MA_3 \cdot MB_3 = MT^2$

RADIAN Unitate de măsură a unghiurilor, egală cu măsura unghiului care, având vârful în centrul unui cerc, subântinde un arc a, a cărui lungime este egală cu raza cercului.

RADICAL (al unui număr) Număr care ridicat la o anumită putere, numită ordin, dă numărul dat.
$3^2 = 9 \Rightarrow 3 = \sqrt{9} \Rightarrow 3$ este radicalul de ordinul 2 al lui 9

RAPORT Numim raport un cât de numere raţionale.

$\frac{a}{b}$ raportul dintre numărul a şi numărul $b \neq 0$

a şi b se numesc termenii raportului.

$\frac{8}{4}$ este raportul dintre numărul 8 şi numărul 4.

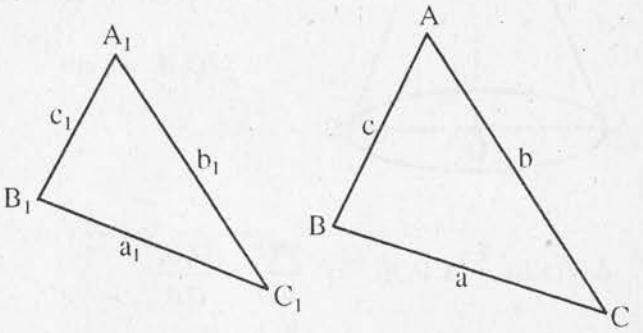
$\frac{8}{4} = 2 \Rightarrow 2$ este valoarea raportului.

Raportul măsurilor a două mărimi măsurate cu aceeaşi unitate de măsură este raportul numerelor prin care se exprimă cele două măsuri. Raportul măsurilor a două mărimi măsurate cu aceeaşi unitate de măsură, din care prima este mai mare decât a doua, ne arată de câte ori prima măsură este mai mare decât a doua sau de câte ori a doua măsură este mai mică decât prima.
Şir de rapoarte egale este un şir de rapoarte cu semnul egal între fiecare pereche de rapoarte învecinate, astfel încât orice pereche de rapoarte din şir să formeze o proporţie.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{xa+yc+ze}{xb+yd+zf}$$

Exemplu de aplicare a şirului de rapoarte egale în geometria plană:

Să se determine laturile unui triunghi cu perimetrul de 40 cm care este asemenea cu triunghiul $A_1B_1C_1$ cu laturi de 3 cm, 4 cm, 5 cm.



$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}$$

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

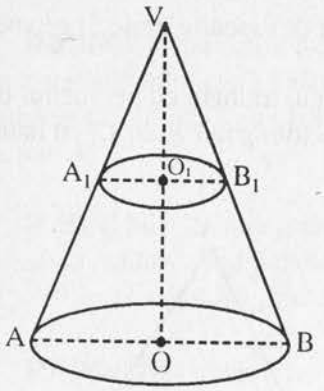
$$\frac{a}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow a = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{4} = \frac{10}{3} \Rightarrow b = \frac{40}{3} \text{ cm}$$

$$\frac{c}{5} = \frac{10}{3} \Rightarrow c = \frac{50}{3} \text{ cm}$$

Exemplu de aplicare a rapoartelor în geometria în spaţiu:

Un con circular drept are raza bazei 8 cm şi înălţimea 12 cm. La ce depărtare de bază trebuie secţionat cu un plan paralel cu baza, astfel încât raza cercului de secţiune să fie 4 cm.



$OB = 8$ cm

$VO = 12$ cm

$O_1B_1 = 4$ cm

$$\Delta\, VO_1B_1 \approx \Delta\, VOB \Rightarrow \frac{VO_1}{VO} = \frac{O_1B_1}{OB}$$

$$\frac{VO_1}{12} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{VO_1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{VO_1}{12 - VO_1} = \frac{1}{2 - 1}$$

$$\frac{VO_1}{OO_1} = 1 \Rightarrow VO_1 = OO_1$$

$$\frac{VO_1}{OO_1} = \frac{1}{2}\ VO$$

$$OO_1 = \frac{1}{2} \cdot 12$$

$$OO_1 = 6 \text{ cm}$$

RAȚIONALIZARE Raționalizarea numitorului unei fracții este eliminarea radicalului de la numitor prin amplificare.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}, \text{ pentru } b > 0$$

Ex.:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{5}{\sqrt{75}} = \frac{5}{\sqrt{25 \cdot 3}} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{9}{4\sqrt{6}} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\sqrt{6}}{4 \cdot \underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

Expresia cu care se amplifică se numește conjugată.

Expresia	Expresia conjugată
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$
$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$
$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$

Ex.:

$$\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = 2(\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

RĂDĂCINĂ

1) Denumire mai veche pentru soluţia unei ecuaţii algebrice.

$3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 2$ este rădăcină a ecuaţiei $3x = 6$

2) Denumire pentru radical.

$\sqrt{9} = 3 \Rightarrow$ rădăcina pătrată a lui 9, este 3.

RĂDĂCINĂ PĂTRATĂ Dacă un număr natural n este pătratul unui număr natural a, atunci a este rădăcina pătrată a numărului natural n.

$$a = \sqrt{n}\ ,\quad n = a^2 \quad \text{deci} \quad a = \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{8^2} = 8$$

$$\sqrt{15^2} = 15$$

Dacă un număr raţional nenegativ n este pătratul unui număr raţional nenegativ a, atunci a se numeşte rădăcină pătrată a lui n.

$$n = a^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \sqrt{n}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}$$

$$\sqrt{0,25} = \sqrt{(0,5)^2} = 0,5$$

Rădăcina pătrată cu aproximaţie de o unitate prin lipsă a unui număr raţional nenegativ a este cel mai mare număr natural n al cărui pătrat este mai mic sau egal cu a.

$$n^2 \le a < (n+1)^2$$

Proprietăţi: 1) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $(a \ge 0;\ b \ge 0)$;

2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $(a \ge 0;\ b > 0)$

Ex.:

1) $\sqrt{49 \cdot 36} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{36} = 7 \cdot 6$

2) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$

3) $\sqrt{x^2} = |x|\ ,\quad x \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{7^2} = 7$

$\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$

Scoaterea factorilor de sub radical:

$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, pentru $a \ge 0,\ b \ge 0$

$\sqrt{a^2 b^3} = \sqrt{a^2 b^2 \cdot b} = ab\sqrt{b}$, pentru $a \ge 0,\ b \ge 0$

Ex.:

$$\sqrt{\frac{75}{64}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 25}{64}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 25}}{\sqrt{64}} = \frac{5\sqrt{3}}{8}$$

În general: $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$, pentru $b \ge 0$

Introducerea factorilor sub radical:

$a = \sqrt{a^2}$

$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, pentru $a,\ b > 0$

Ex.:

$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}$

$-3\sqrt{5} = -\sqrt{3^2 \cdot 5} = -\sqrt{45}$

RECIPROCA UNEI TEOREME Teoremă obținută din alta, prin înlocuirea ipotezei cu concluzia.

$A \Rightarrow B$ teorema

dacă $\Rightarrow$ atunci

$B \Rightarrow A$ reciproca

Teorema: dacă un număr este divizibil cu 3, atunci suma cifrelor lui este divizibilă cu 3.

Reciproca: dacă suma cifrelor unui număr este divizibilă cu 3, atunci numărul este divizibil cu 3.

REDUCEREA LA ABSURD Metodă de demonstrație prin care presupunând că nu este adevărată concluzia, prin judecăți logice corecte, se ajunge la o propoziție contrară unei părți din ipoteză. Se ajunge la o afirmație absurdă. Deci premisa de la care s-a pornit e falsă, adică concluzia este adevărată.

REGULA DE TREI COMPUSĂ Procedeu folosit la rezolvarea problemelor în care intervin mai multe mulțimi de câte două numere, între unele dintre ele existând o proporționalitate directă, iar între altele o proporționalitate inversă.

Ex.: 7 muncitori lucrând 8 ore pe zi termină o lucrare în 20 zile. În câte zile vor termina lucrarea 10 muncitori lucrând 7 ore pe zi.

7m ..... 8h ..... 20 zile

10m ..... 7h ..... x zile

7m ..... 8h ..... 20 zile

1m ..... 8h ..... $20 \cdot 7 = 140$ zile

1m ..... 1h ..... $140 \cdot 8$ zile

1m ..... 7h ..... $\frac{140 \cdot 8}{7} = 160$ zile

10m ..... 7h ..... $\frac{160}{10} = 16$ zile.

REGULA DE TREI SIMPLĂ Procedeu care se folosește pentru determinarea numărului necunoscut dintr-o mulțime de două numere, din două mulțimi de câte două numere între care există o proporționalitate directă sau o proporționalitate inversă.

Ex.:

20 perechi de pantofi costă 290.000 lei. Cât costă 5 perechi de pantofi?

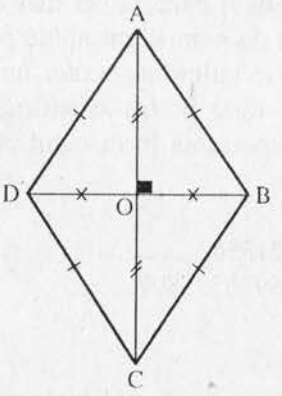
20 ..... 290.000 lei

5 x

$$x = \frac{5 \cdot 290.000}{20} = 5 \cdot 14.500 = 72.500$$

RELAȚIA DE ORDINE ÎN IN v. NUMĂR ÎNTREG

ROMB Paralelogram care are două laturi consecutive congruente.



Toate laturile rombului sunt congruente

$[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DA]$

Unghiurile opuse sunt congruente

$$\hat{A} \equiv \hat{C}$$
$$\hat{D} \equiv \hat{I}$$

Două unghiuri consecutive sunt suplementare

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^\circ$$

Diagonalele au același mijloc

$$[AO] \equiv [OC]$$
$$[BO] \equiv [OD]$$

Diagonalele sunt perpendiculare între ele și sunt bisectoarele unghiurilor rombului

$$[AC] \perp [DB]$$

$\mathcal{P} = 4 \cdot AB$, (perimetrul rombului).

$$\mathcal{A}_{[ABCD]} = \frac{AC \cdot BD}{2}, \text{ (aria rombului).}$$

ROTUNJIRE Întregire, modificare a rezultatului numeric al unui calcul până la cel mai apropiat număr întreg. La calculul cu numere cu multe poziții este suficient adesea să fie calculate exact numai *n* poziții. Celelalte se pot face printr-o rotunjire adecvată. Rotunjirea este importantă în calculul cu numere zecimale nefracționare.

$\sqrt{2} = 1,\ 414213562.....$
$\pi = 3,\ 1415926535897.....$

Dacă se consideră:

$\sqrt{2} = 1,\ 4142$ cifrele zecimale sunt exacte la 4
$\pi = 3,\ 1416$ poziții după virgulă, adică ultima cifră este corect rotunjită.

RUSSEL, Bertrand (1872 - 1970), filozof, matematician și literat englez. A adus o contribuție însemnată la dezvoltarea logicii simbolice, încercând deducerea matematicii din logică. În lucrarea sa „Principia mathematica ", scrisă în colaborare cu A. Whitehead, a elaborat teoria tipurilor.

SCĂDERE Operaţie fundamentală a aritmeticii prin care un număr, numit *scăzător* este scăzut din altul mai mare, numit *descăzut*. Rezultatul operaţiei este *restul* (care adunat cu scăzătorul dă descăzutul). Semnul operaţiei este minus (-).

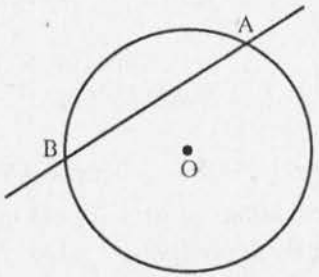
Ex:

descăzutul:	7359 -	34,7 -
scăzătorul:	3257	6,491
rest:	4102	28,209

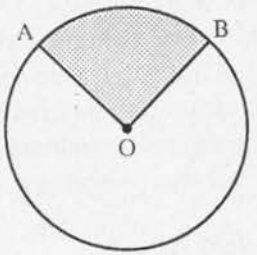
Numerele care se adună sau se scad se numesc *termeni*. Pentru a face proba unei scăderi se adună restul la scăzător şi se obţine descăzutul.

Proprietăţi ale scăderii: 1) dacă se micşorează sau se măresc cu acelaşi număr ambii termeni ai scăderii, restul rămâne acelaşi; 2) dacă se măreşte sau se micşorează termenul cel mai mare (descăzutul) cu un număr oarecare restul se măreşte sau se micşorează cu acelaşi număr; 3) dacă şe măreşte sau se micşorează termenul cel mai mic (scăzătorul) cu un număr oarecare restul se micşorează sau se măreşte cu acelaşi număr.

SECANTĂ Dreapta care taie cercul în două puncte.

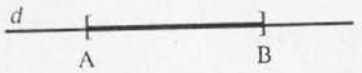


SECTOR CIRCULAR Porţiune din interiorul unui cerc cuprinsă între două raze ale sale.



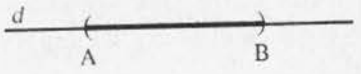
SEGMENT Mulţimea punctelor unei drepte cuprinse între două puncte ale ei. Un segment este bine determinat prin capetele sale.

$[AB]$ segment închis



$A \in [AB]$
$B \in [AB]$
$[AB] \subset AB$

(AB) segment deschis



$A \notin (AB)$
$B \notin (AB)$
$(AB) \subset AB$

$[AA] = \{A\}$

$(AA) = \varnothing$

Segment nul este segmentul (AB), în care $A = B$.
Segmente identice sunt segmente care conţin aceleaşi puncte interioare.

$[AB] = [CD] \Leftrightarrow \forall M \in [AB]$ şi $M \in [CD]$

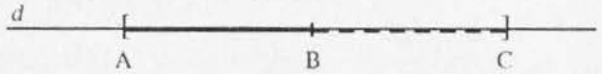
Lungimea segmentului este raportul dintre lungimea sa şi lungimea segmentului unitate. Distanţa de la punctul A la punctul B este lungimea segmentului AB.
AB ; notaţie pentru lungimea segmentului.
Segmente congruente sunt segmente care au lungimi egale.

$[AB] \equiv [MN]$, dacă $AB = MN$

Operaţii cu segmente:
Segmentele se pot aduna sau scădea, dacă sunt măsurate cu aceeaşi unitate de măsură.
Suma a două segmente $[AB]$ şi $[BC]$ este segmentul $[AC]$, a cărui lungime este egală cu suma lungimilor segmentelor $[AB]$ şi $[BC]$.

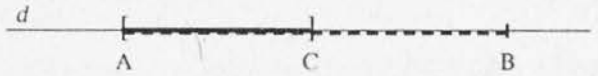
$AB + BC = AC$

$[AC]$, se numeşte segmentul sumă.



Segmentul sumă

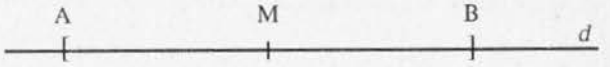
Diferenţa a două segmente $[AB]$ şi $[BC]$ este segmentul $[AC]$, a cărui lungime este egală cu diferenţa lungimilor segmentelor $[AB]$ şi $[BC]$.



Segmentul diferenţă

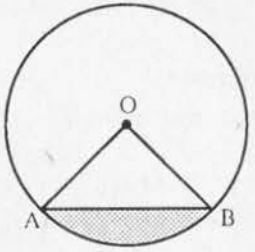
$C \in [AB]$

Mijlocul unui segment este un punct al segmentului la distanţă egală de capetele segmentului.

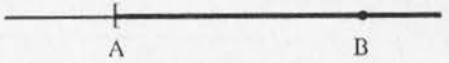


M este mijlocul segmentului.
$M \in [AB]$
$AM = MB$
M este punct unic.

Segment circular Porţiunea din interiorul unui cerc cuprinsă între un arc de cerc şi coarda care subântinde acel arc de cerc.



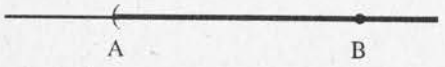
SEMIDREAPTĂ Mulţimea punctelor unei drepte situate de aceeaşi parte a unui punct al ei.
$[AB$ este semidreaptă închisă.



$[AB \subset AB$

$A \in [AB$

$(AB$ este semidreaptă deschisă.

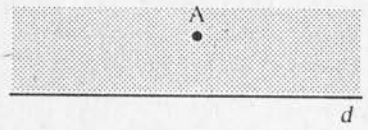


$(AB \subset AB$

$A \notin (AB$

O dreaptă este descompusă de un punct P în două semidrepte.

SEMIPLAN Mulţimea punctelor dintr-un plan situate de aceeaşi parte a unei drepte.



$[dA$ = semiplan închis
$d \in [dA$
$(dA$ = semiplan deschis
$d \notin (dA$

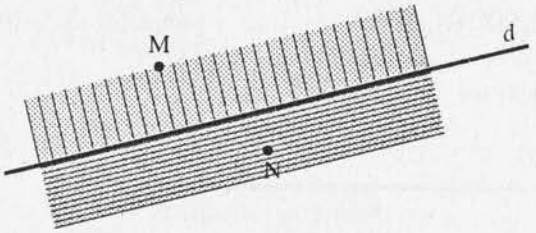
Semiplanul $[dA$

Semiplane identice sunt semiplane care conţin aceleaşi puncte.

$[dA = [dB$; $\forall M \in [dA$ rezultă $M \in [dB$

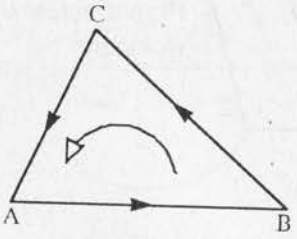
$(dA = (dB$; $\forall M \in (dA$ rezultă $M \in (dB$

Semiplane opuse sunt semiplanele în care este împărţit planul de către o dreaptă.

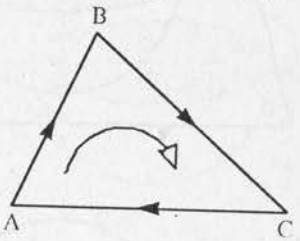


Semiplane opuse $[dM$ şi $[dN$.

SENS Dacă parcurgem laturile unui triunghi ABC, astfel încât vârfurile să urmeze în ordinea A - B - C (sau B - C - A sau C - A - B), atunci interiorul triunghiului se află fie mereu în dreapta, fie mereu în stânga drumului.

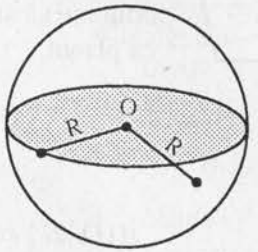


Sens pozitiv de parcurgere



Sens negativ de parcurgere

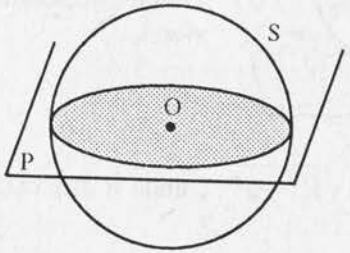
SFERA Locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct fix numit centru



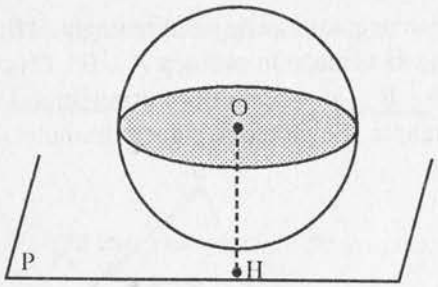
$A = 4\pi R^2$, (aria sferei)

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, (volumul sferei)

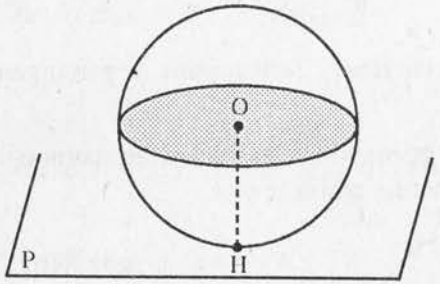
Intersecţia unei sfere cu un plan:



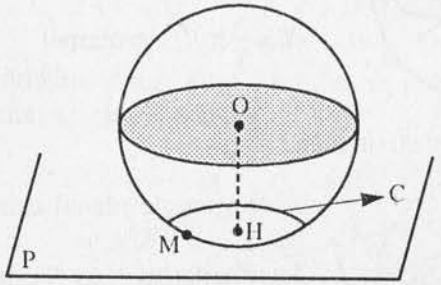
P se numeşte planul central al sferei S.
Intersecţia lui P cu S este cercul de centru O şi raza R, conţinut în plan şi numit cercul mare al sferei.



$d(O, H) > R$;
$S \cap P = \varnothing$
Planul este exterior sferei.



$d(O, H) = R$;
$S \cap P = \{H\}$
Planul este tangent sferei.
H este punctul de contact al sferei cu planul.

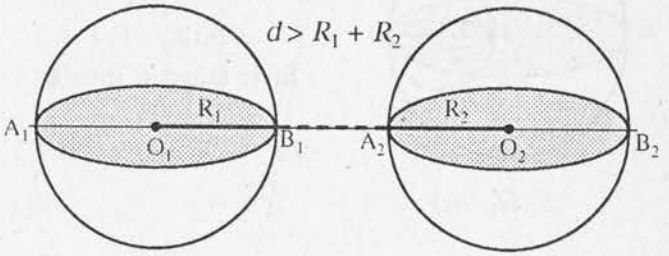


$d(O, H) < R$;
$S \cap P = C$
Planul este secant sferei.

Dacă $M \in C$, $d(M, H) = \sqrt{R^2 - a^2}$, unde R este raza sferei, iar $a = d(O, P)$

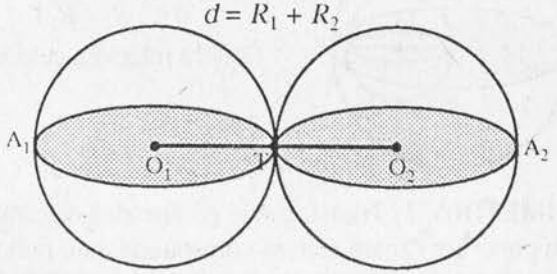
Poziţiile a două sfere: $O_1O_2 = d$

Sfere exterioare



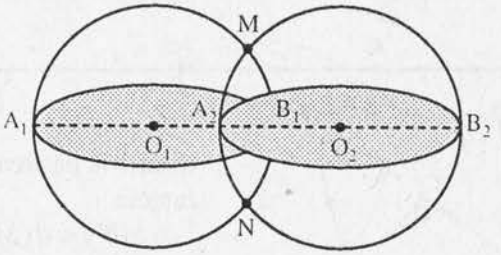
$S_1(O_1, R_1)$ $S_2(O_2, R_2)$

Sfere tangente exterior

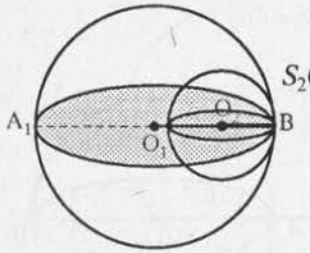


$S_1(O_1, R_1)$ $S_2(O_2, R_2)$

Sfere secante $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$



$S_1(O_1, R_1)$ $S_2(O_2, R_2)$

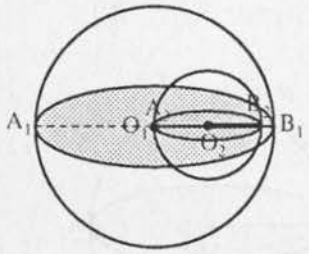


$S_2(O_1, R_2)$

$d = |R_1 - R_2|$

Sfere tangente interior.

$S_1(O_1, R_1)$

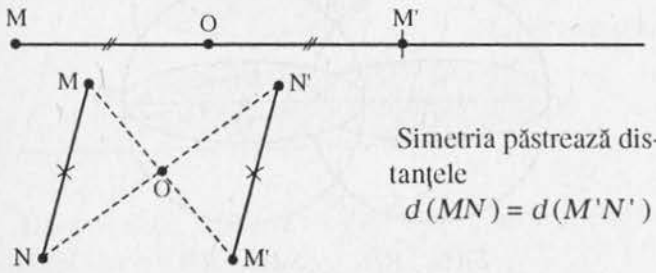


$d < |R_1 - R_2|$

O sferă interioară celeilalte.

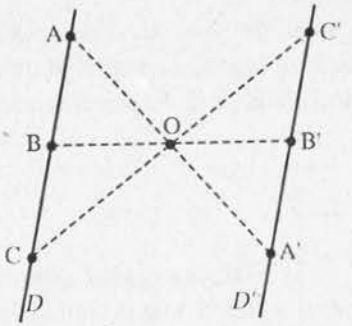
SIMETRIA 1) Transformare geometrică determinată de un punct fix O care face să corespundă unui punct M, punctul M', astfel încât M, O, M' sunt colineare, iar $[MO] \equiv [OM']$.

M' este imaginea lui M.

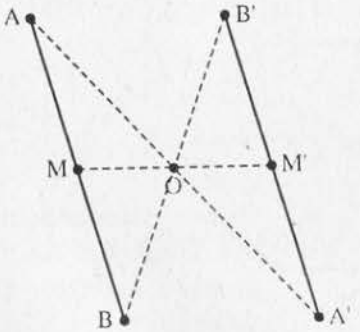


Simetria păstrează distanțele

$d(MN) = d(M'N')$



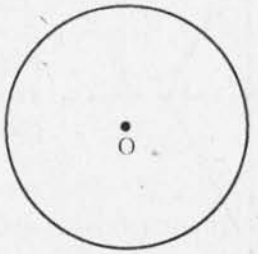
D' este imaginea dreptei D



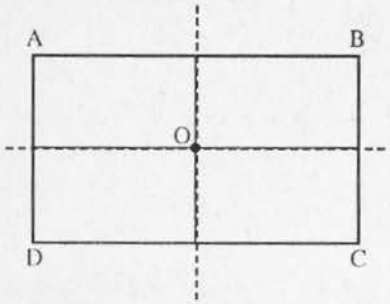
Imaginea mijlocului unui segment este mijlocul segmentului imagine

Paralelogramul, dreptunghiul, pătratul și rombul admit ca centru de simetrie punctul de intersecție al diagonalelor.

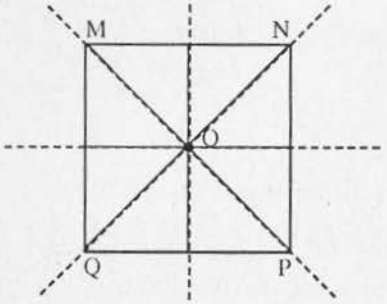
Cercul admite ca centru de simetrie chiar centrul lui.



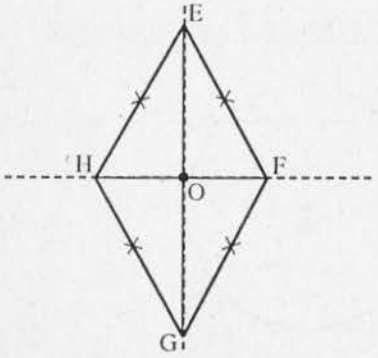
2) Transformare geometrică determinată de o dreaptă d fixă, numită axă de simetrie care face să corespundă unui punct M, punctul M', astfel încât d să fie mediatoarea segmentului MM'.



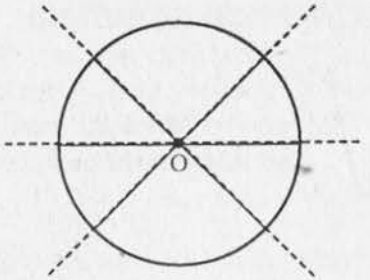
Dreptunghiul admite două axe de simetrie: mediatoarele laturilor.



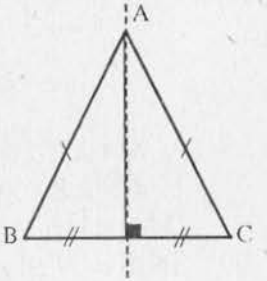
Pătratul admite patru axe de simetrie: mediatoarele laturilor şi diagonalele.



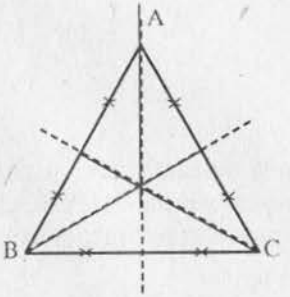
Rombul admite două axe de simetrie: diagonalele.



Cercul admite o infinitate de axe de simetrie: toate diametrele.

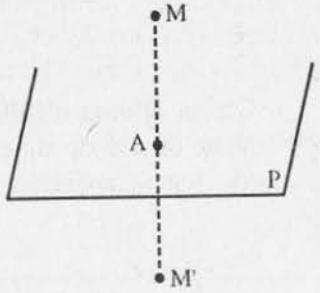


Triunghiul isoscel admite ca axă de simetrie mediatoarea bazei.



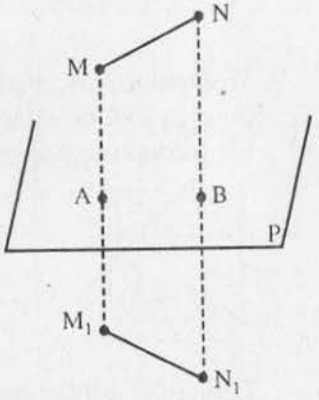
Triunghiul echilateral admite trei axe de simetrie: cele trei mediatoare ale laturilor.

Simetria faţă de un plan Simetricul unui punct M faţă de un plan P este simetricul punctului faţă de proiecţia lui pe plan.



$MA \perp P$
$[MA] \equiv [M'A]$

Simetria păstrează distanţele.



$MA \perp P$
$NB \perp P$
$[MA] \equiv [M_1A]$
$[NB] \equiv [N_1B]$

SIMPLIFICARE Împărţirea numărătorului şi numitorului unei fracţii cu acelaşi număr natural care este divizor comun al numărătorului şi numitorului fracţiei date.

$$\frac{50^{\backslash 10}}{70} = \frac{5}{7}$$

SIMSON, Thomas (1710 - 1761), matematician englez. Contribuţii în domeniul geometriei, al analizei matematice şi al calculului numeric.

SISTEM DE NUMERAŢIE BINAR Numerele 0 şi 1 se numesc cifre binare. Numărul 2 este baza sistemului binar. Scrierea numerelor naturale cu ajutorul cifrelor binare împreună cu operaţiile aritmetice, constituie sistemul de numeraţie binar.

$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 8 + 4 + 1 = 13$
$13 = 1101_{(2)}$

Scrierea unor cifre în sistemul binar

0	zero	10000	şasesprezece
1	unu	10001	şaptesprezece
10	doi	10010	optsprezece
11	trei	10011	nouăsprezece
100	patru	10100	douăzeci
101	cinci	10101	douăzeci şi unu
110	şase	10110	douăzeci şi doi
111	şapte	10111	douăzeci şi trei
1000	opt	11000	douăzeci şi patru
1001	nouă	11001	douăzeci şi cinci
1010	zece	11010	douăzeci şi şase
1011	unsprezece	11011	douăzeci şi şapte
1100	doisprezece	11100	douăzeci şi opt
1101	treisprezece	11101	douăzeci şi nouă
1110	patrusprezece	11110	treizeci
1111	cincisprezece		

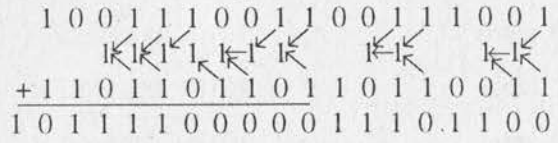
Pentru scrierea puterilor numărului 10 se folosesc:

$1 = 1$
$10 = 1010$
$100 = 1100100$
$1000 = 1111101000$
$10000 = 10011100010000$
$100000 = 11000011010100000$
$1000000 = 11110100001001000000$

Adunarea în sistemul binar:

$$\begin{array}{r} 1001110011001110 01 \\ +\ 1101101101101100 11 \\ \hline 1011110000011101100 \end{array}$$

Pentru adunare se foloseşte schema:



Înmulţirea în sistemul binar:

$$\begin{array}{r} 110101 \\ \times\ 10110 \\ \hline 1101010 \\ 110101 \\ 110101 \\ \hline 10010001110 \end{array}$$

Pentru înmulţire se foloseşte scrierea numărului

$10110 = 10 + 100 + 10000$

$110101 \cdot 10110 = 110101 \cdot (10 + 100 + 10000)$
$= 110101 \cdot 10 + 110101 \cdot 100 + 110101 \cdot 10000$
$= 1101010 + 11010100 + 1101010000$
$= 10010001110$

SISTEM DE NUMERAŢIE ZECIMAL Scrierea numerelor naturale cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 împreună cu operaţiile de adunare, scădere, înmulţire şi împărţire constituie sistemul de numeraţie zecimal sau în baza zece.

10 este baza sistemului de numeraţie.

Scrierea numerelor în baza zece:

$\overline{ab} = 10a + b,\ a \neq 0;$
$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c,\ a \neq 0;$
$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d,\ a \neq 0.$

Ex.:

$\overline{23} = 10 \cdot 2 + 3;$
$\overline{523} = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3;$
$\overline{4027} = 4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7.$

Transformarea unor numere din sistem binar în sistem zecimal:

$111000111 = 1 + 2 + 4 + 64 + 128 + 256 = 455$
$10101010 = 2 + 8 + 32 + 128 = 170$
$1000001 = 1 + 64 = 65$
$111101 = 1 + 4 + 8 + 16 + 32 = 61$
$1000101 = 1 + 4 + 64 = 69$

SISTEME DE ECUAŢII O asociere de două sau mai multe ecuaţii formează un sistem. În general un număr sau un sistem de numere este o soluţie pentru un sistem, dacă este soluţie pentru fiecare ecuaţie a sistemului.

Un sistem de forma: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$ se numeşte

sistem de două ecuaţii de gradul I cu două necunoscute.

a_1, a_2, b_1, b_2 sunt coeficienții sistemului.

c_1, c_2 sunt termenii liberi.

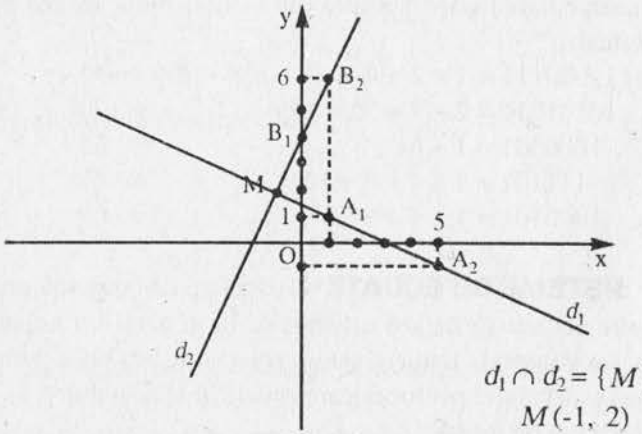
A rezolva un sistem înseamnă a-i determina toate soluțiile. Soluțiile sistemului se află la intersecția dreptelor soluțiilor celor două ecuații.

Ex.:

1) $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ $A_1(1, 1)$ $\begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$ $A_2(5, -1)$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 4 \end{cases}$ $B_1(0, 4)$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 6 \end{cases}$ $B_2(1, 6)$

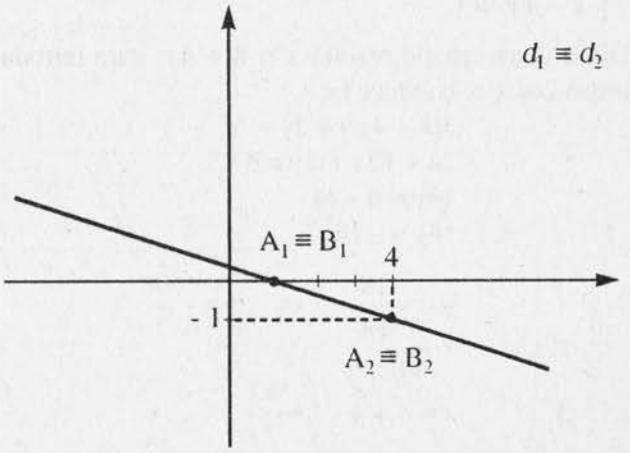


$d_1 \cap d_2 = \{M\}$

$M(-1, 2)$

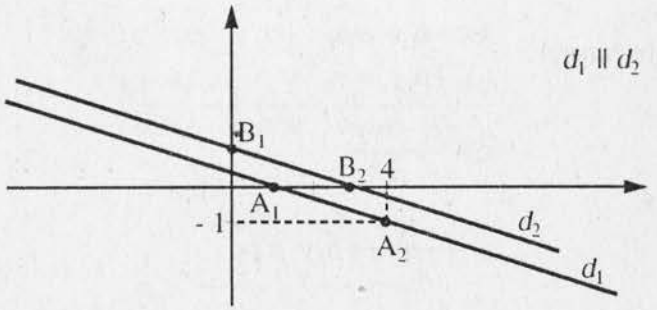
Soluția sistemului este dată de coordonatele punctului M, adică $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 2x + 6y - 2 = 0 \end{cases}$ $A_1(1, 0)$; $B_1(1, 0)$ $A_2(4, -1)$; $B_2(4, -1)$



Coordonatele oricărui punct de pe $d_1 \equiv d_2$ verifică cele două ecuații. Deci mulțimea soluțiilor este nedeterminată.

3) $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 2x + 6y - 6 = 0 \end{cases}$ $A_1(1, 0)$; $B_1(0, 1)$ $A_2(4, -1)$; $B_2(3, 0)$



Sistemul nu are nici o soluție, deoarece $d_1 \parallel d_2$ nu au nici un punct comun.

Metoda substituției:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - 4y = 8 \end{cases}$$

Din a doua ecuație rezultă $x = 8 + 4y$, care introdus în prima ecuație, conduce la:

$$3(8 + 4y) + 2y = 6$$
$$24 + 12y + 2y = 6$$
$$14y = 6 - 24$$
$$14y = -18$$

$$y = -\frac{18}{14} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{9}{7}$$

$$x = 8 + 4 \cdot \left(-\frac{9}{7}\right)$$

$$x = \frac{56 - 36}{7}$$

$$x = \frac{20}{7}$$

$$\begin{cases} x = \frac{20}{7} \\ y = -\frac{9}{7} \end{cases}$$

În general: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$

$$a_2\frac{c_1 - b_1y}{a_1} + b_2y = c_2$$

$$a_2c_1 - a_2b_1y + a_1b_2y = a_1c_2$$

$$y(a_1b_2 - a_2b_1) = a_1c_2 - a_2c_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Metoda reducerii:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - 4y = 8 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ x - 4y = 8 \end{cases}$$

$$7x \ / \ = 20$$

$$x = \frac{20}{7} \quad \Rightarrow \quad \frac{20}{7} - 4y = 8 \quad \Rightarrow \quad 20 - 28y = 56$$

$$-28y = 36$$

$$y = -\frac{36}{28} = -\frac{9}{7}$$

În general

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} | \ b_2 \\ | \ -b_1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -b_1c_2 \end{cases}$$

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) \ / \ = c_1b_2 - b_1c_2$$

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$a_1 \cdot \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} + b_1y = c_1$$

 Din această ecuație se obține y.

SUBMULŢIMI v. MULŢIMI

STEVIN, Simon (Simon de Bruges) (1548 - 1620), matematician şi fizician flamand. Lucrări în domeniul fracţiilor zecimale.

TABELE MATEMATICE Serii de valori numerice sau de formule obţinute prin **calcul**, observaţii, demonstraţii, aranjate într-o anumită ordine, în şiruri şi coloane, pentru uşurarea unor calcule sau pentru obţinerea unor clasificări.

1) TABELE NUMERICE:

Tabelul 1. Pătratele şi cuburile întregi de la 1 la 99

Numere	Pătrate	Cuburi	Numere	Pătrate	Cuburi	Numere	Pătrate	Cuburi
1	1	1	27	729	19.683	53	2.809	148.877
2	4	8	28	784	21.952	54	2.916	157.464
3	9	27	29	841	24.389	55	3.025	166.375
4	16	64	30	900	27.000	56	3.136	175.616
5	25	125	31	961	29.791	57	3.249	185.193
6	36	216	32	1.024	32.768	58	3.364	195.112
7	49	343	33	1.089	35.937	59	3.481	205.379
8	64	512	34	1.156	39.304	60	3.600	216.000
9	81	729	35	1.225	42.875	61	3.721	226.981
10	100	1.000	36	1.296	46.656	62	3.844	238.328
11	121	1.331	37	1.369	50.653	63	3.969	250.047
12	144	1.728	38	1.444	54.872	64	4.096	262.144
13	169	2.197	39	1.521	59.319	65	4.225	274.625
14	196	2.744	40	1.600	64.000	66	4.356	287.496
15	225	3.375	41	1.681	68.921	67	4.489	300.763
16	256	4.096	42	1.764	74.088	68	4.624	314.432
17	289	4.913	43	1.849	79.507	69	4.761	328.509
18	324	5.832	44	1.936	85.184	70	4.900	343.000
19	361	6.859	45	2.025	91.125	71	5.041	357.911
20	400	8.000	46	2.116	97.336	72	5.184	373.248
21	441	9.261	47	2.209	103.823	73	5.329	389.017
22	484	10.648	48	2.304	110.592	74	5.476	405.224
23	529	12.167	49	2.401	117.649	75	5.625	421.875
24	576	13.824	50	2.500	125.000	76	5.776	438.976
25	625	15.625	51	2.601	132.651	77	5.929	456.533
26	676	17.576	52	2.704	140.608	78	6.084	474.552

Numere	Pătrate	Cuburi	Numere	Pătrate	Cuburi	Numere	Pătrate	Cuburi
79	6.241	493.039	86	7.396	636.056	93	8.649	804.357
80	6.400	512.000	87	7.569	658.503	94	8.836	830.584
81	6.561	531.441	88	7.744	681.472	95	9.025	857.375
82	6.724	551.368	89	7.921	704.969	96	9.216	884.736
83	6.889	571.787	90	8.100	729.000	97	9.409	912.673
84	7.056	592.704	91	8.281	753.571	98	9.604	941.192
85	7.225	614.125	92	8.464	778.688	99	9.801	970.299

Tabelul 2. Rădăcinile pătrate şi inversele numerelor întregi de la 1 la 100

n	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	16	4	0,0625
2	1,4142	0,5	17	4,1231	0,0588
3	1,7321	0,3333	18	4,2426	0,0556
4	2	0,25	19	4,3589	0,0526
5	2,2361	0,2	20	4,4721	0,05
6	2,4495	0,1667	21	4,5826	0,0476
7	2,6458	0,1429	22	4,6904	0,0455
8	2,8284	0,125	23	4,7958	0,0435
9	3	0,1111	24	4,8990	0,0417
10	3,1623	0,1	25	5	0,04
11	3,3166	0,0909	26	5,0990	0,0385
12	3,4641	0,0833	27	5,1962	0,0370
13	3,6056	0,0769	28	5,2915	0,0357
14	3,7417	0,0714	29	5,3852	0,0345
15	3,8730	0,0667	30	5,4772	0,0333

n	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$
31	5,5678	0,0323	60	7,7460	0,0167
32	5,6569	0,0313	61	7,8102	0,0164
33	5,7446	0,0303	62	7,8740	0,0161
34	5,8310	0,0294	63	7,9373	0,0159
35	5,9161	0,0286	64	8	0,0156
36	6	0,0278	65	8,0623	0,0154
37	6,0828	0,0270	66	8,1240	0,0152
38	6,1644	0,0263	67	8,1854	0,0149
39	6,2450	0,0256	68	8,2462	0,0147
40	6,3246	0,025	69	8,3066	0,0145
41	6,4031	0,0244	70	8,3666	0,0143
42	6,4807	0,0238	71	8,4261	0,0141
43	6,5574	0,0233	72	8,4853	0,0139
44	6,6332	0,0227	73	8,5440	0,0137
45	6,7082	0,0222	74	8,6023	0,0135
46	6,7823	0,0217	75	8,6603	0,0133
47	6,8557	0,0213	76	8,7178	0,0132
48	6,9282	0,0208	77	8,7750	0,0130
49	7	0,0204	78	8,8318	0,0128
50	7,0711	0,02	79	8,8882	0,0127
51	7,1414	0,0196	80	8,9443	0,0125
52	7,2111	0,0192	81	9	0,0123
53	7,2801	0,0189	82	9,0554	0,0122
54	7,3485	0,0185	83	9,1104	0,0120
55	7,4162	0,0182	84	9,1652	0,0119
56	7,4833	0,0179	85	9,2195	0,0118
57	7,5498	0,0175	86	9,2736	0,0116
58	7,6158	0,0172	87	9,3274	0,0115
59	7,6811	0,0169	88	9,3808	0,0114

n	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$
89	9,4340	0,0112	95	9,7468	0,0105
90	9,4868	0,0111	96	9,7980	0,0104
91	9,5394	0,0110	97	9,8489	0,0103
92	9,5917	0,0109	98	9,8995	0,0102
93	9,6434	0,0108	99	9,9499	0,0101
94	9,6957	0,0106	100	10	0,01

Tabelul 3 Tabela trigonometrică în grade sexazecimale.

Grade	Sinus	Tangenta	Grade	Sinus	Tangenta
1	0,0175	0,0175	17	0,2924	0,3057
2	0,0349	0,0349	18	0,3090	0,3249
3	0,0523	0,0524	19	0,3256	0,3443
4	0,0698	0,0699	20	0,3420	0,3640
5	0,0872	0,0875	21	0,3584	0,3839
6	0,1045	0,1051	22	0,3746	0,4040
7	0,1219	0,1228	23	0,3907	0,4245
8	0,1392	0,1405	24	0,4067	0,4452
9	0,1564	0,1584	25	0,4226	0,4663
10	0,1736	0,1763	26	0,4384	0,4877
11	0,1908	0,1944	27	0,4540	0,5095
12	0,2079	0,2126	28	0,4695	0,5317
13	0,2250	0,2309	29	0,4848	0,5543
14	0,2419	0,2493	30	0,5000	0,5774
15	0,2588	0,2679	31	0,5150	0,6009
16	0,2756	0,2867	32	0,5299	0,6249

Grade	Sinus	Tangenta	Grade	Sinus	Tangenta
33	0,5446	0,6494	62	0,8829	1,8807
34	0,5592	0,6745	63	0,8910	1,9626
35	0,5736	0,7002	64	0,8988	2,0503
36	0,5878	0,7265	65	0,9063	2,1445
37	0,6018	0,7536	66	0,9135	2,2460
38	0,6157	0,7813	67	0,9205	2,3559
39	0,6293	0,8098	68	0,9272	2,4751
40	0,6428	0,8391	69	0,9336	2,6051
41	0,6561	0,8693	70	0,9397	2,7475
42	0,6691	0,9004	71	0,9455	2,9042
43	0,6820	0,9325	72	0,9511	3,0777
44	0,6947	0,9657	73	0,9563	3,2709
45	0,7071	1,0000	74	0,9613	3,4874
46	0,7193	1,0355	75	0,9659	3,7321
47	0,7314	1,0724	76	0,9703	4,0108
48	0,7431	1,1106	77	0,9744	4,3315
49	0,7547	1,1504	78	0,9781	4,7046
50	0,7660	1,1918	79	0,9816	5,1446
51	0,7771	1,2349	80	0,9848	5,6713
52	0,7880	1,2799	81	0,9877	6,3138
53	0,7986	1,3270	82	0,9903	7,1154
54	0,8090	1,3764	83	0,9925	8,1443
55	0,8192	1,4281	84	0,9945	9,5144
56	0,8290	1,4826	85	0,9962	11,4301
57	0,8387	1,5399	86	0,9976	14,3007
58	0,8480	1,6003	87	0,9986	19,0811
59	0,8572	1,6643	88	0,9994	28,6363
60	0,8660	1,7321	89	0,9998	57,2900
61	0,8746	1,8040	90	1,0000	

2) TABELE DE FORMULE:

Poligoane regulate

	Latura	Apotema	Aria
Triunghiul echilateral	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
Patratul	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$
Hexagonul regulat	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$
Octogonul regulat	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$2R^2\sqrt{2}$

Ariile şi volumele corpurilor mai des întâlnite

	Aria	Volumul
Sfera	$4\pi R^2$	$\frac{4\pi R^3}{3}$
Calota sferică	$2\pi R h_{calotă}$	—
Zona sferică	$2\pi R h_{zonă}$	—
Segment sferic	—	$\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$
Sector sferic	—	$\frac{1}{3}RS_{\text{zonă ce mărgineşte sectorul}}$

Prisma dreaptă

Aria laterală	Aria totală	Volumul
$P_B \cdot l$	$P_B \cdot l + 2B$	$B \cdot l$

Paralelipipedul dreptunghic

Aria laterală	Aria totală	Volumul
$2l(L+l)$	$2l(L+l)+2L \cdot l$	$L \cdot l \cdot l$

Cubul

Aria laterală	Aria totală	Volumul
$4l^2$	$6l^2$	l^3

Piramida regulată

Aria laterală	Aria totală	Volumul
$\frac{P_B \cdot A_P}{2}$	$\frac{P_B \cdot A_P}{2} + B$	$\frac{B \cdot l}{3}$

Trunchiul de piramidă

Aria laterală	Aria totală	Volumul
$\frac{(P_B + p_b)A_p}{2}$	$\frac{(P_B + p_b)A_p}{2} + B + b$	$\frac{1}{3}(B + b + \sqrt{B \cdot b})$

Cilindru circular drept

Aria laterală	Aria totală	Volumul
$2\pi Rl$	$2\pi R(l + R)$	$\pi R^2 l$

Con circular drept

Aria laterală	Aria totală	Volumul
πRG	$\pi R(G + R)$	$\frac{\pi l R^2}{3}$

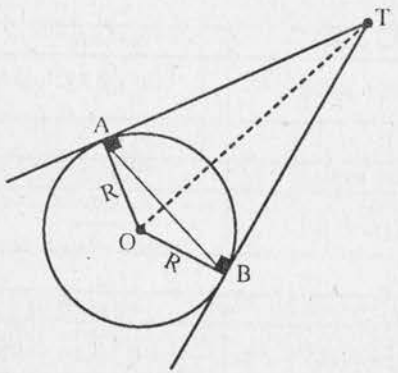
Trunchiul de con

Aria laterală	Aria totală	Volumul
$\pi G(R + r)$	$\pi G(R + r) + \pi(R^2 + r^2)$	$\frac{\pi \cdot l}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$

Funcţiile trigonometrice ale unghiurilor de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

TANGENTĂ Dreapta care are un singur punct comun cu cercul. Tangenta este perpendiculară pe rază în punctul de contact.



$[TA] \perp [OA]$

$[TB] \perp [OB]$

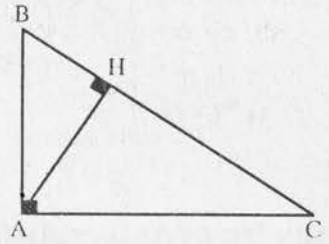
Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce două tangente la acest cerc. Tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt congruente.

$[TA] \equiv [TB]$

$[TO$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{ATB}$.

$[TO$ este mediatoarea segmentului $[AB]$.

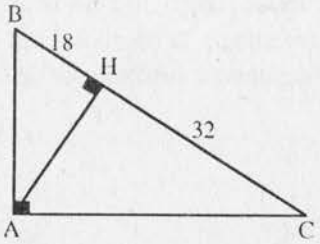
TEOREMA CATETEI Într-un triunghi dreptunghic ABC o catetă este medie proporţională între ipotenuză şi proiecţia ei pe ipotenuză.



$BA^2 = BC \cdot BH$

$CA^2 = CB \cdot CH$

Ex.: Fie: $BH = 18$ şi $HC = 32$.



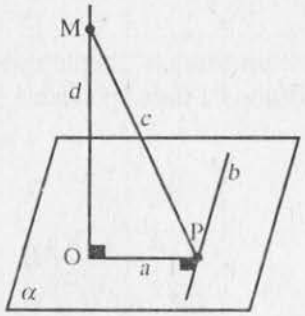
$BC = 18 + 32 = 50$

$BA^2 = 50 \cdot 18 = 900 \Rightarrow BA = 30$

$CA^2 = 1600 \Rightarrow CA = 40.$

TEOREMA CELOR TREI PERPENDICULARE

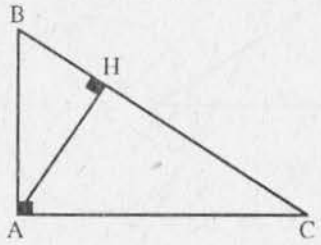
Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe un plan α şi prin piciorul ei trece o dreaptă a conţinută în plan, perpendiculara pe o altă dreaptă b conţinută în plan, o dreaptă c care uneşte orice punct M, al perpendicularei d pe plan, cu intersecţia P a celor două perpendiculare din plan, este perpendiculara pe a treia dreaptă b.



$$\left.\begin{array}{l} d \perp \alpha \\ d \cap \alpha = \{0\} \\ a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \perp b \\ M \in d \end{array}\right\} \Rightarrow MP \perp b$$

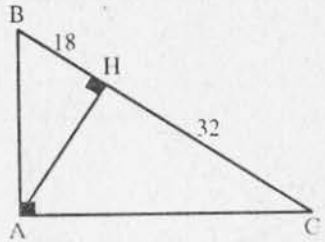
TEOREMA ÎMPĂRŢIRII ÎNTREGI v. NUMĂR NATURAL

TEOREMA ÎNĂLŢIMII Într-un triunghi dreptunghic ABC înălţimea referitoare la unghiul drept este medie proporţională între segmentele determinate de ea pe ipotenuză.



$$AH^2 = BH \cdot HC$$

Ex.: Fie $BH = 18$ şi $HC = 32$.



$$AH^2 = 18 \cdot 32$$

$$AH^2 = 576$$

$$AH = 24$$

TEOREMA LUI BÉZOUT Numărul x = a este rădăcină a polinomului $P(x)$, dacă şi numai dacă binomul $x - a$ îl divide pe $P(x)$, adică $P(a) = 0$.

Ex.:

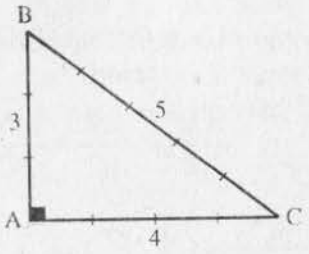
$P(x) = 2x^n - (n-1)x^{n-1} + nx^{n-2} - 3$,

are rădăcina $a = 1$

$P(1) = 2 - (n-1) + n - 3 = 2 - \cancel{n} + 1 + \cancel{n} - 3 = 0$

TEOREMA LUI PITAGORA Într-un triunghi dreptunghic ABC, pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor.

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

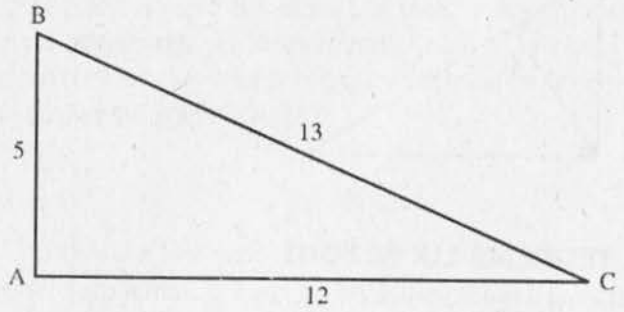


$$BC^2 = 25;$$

$$AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25;$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Reciproc, dacă într-un triunghi pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două, triunghiul este dreptunghic.



Ex.:

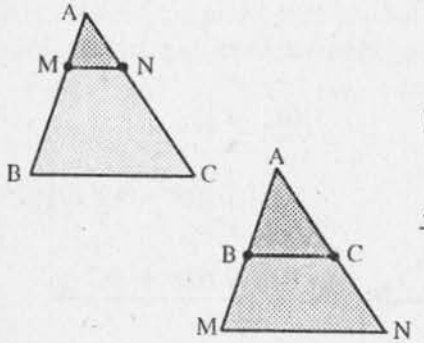
$AB = 5 \Rightarrow AB^2 = 25$

$AC = 12 \Rightarrow AC^2 = 144 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC = 13 \Rightarrow BC^2 = 169$

Deci ΔABC este dreptunghic în A.

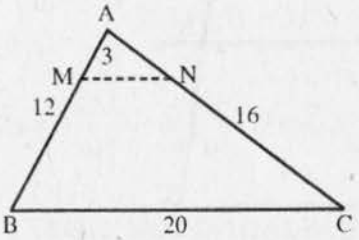
TEOREMA LUI THALES O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporţionale.



Dacă: $(MN) \parallel (BC)$
atunci:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Ex.:



Fie: $AB = 12$;
$AC = 16$;
$BC = 20$.

$M \in [AB]$; $AM = 3$; $(MN) \parallel (BC)$, $N \in [AC]$

Rezultă: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$; $\frac{3}{12} = \frac{AN}{16}$

adică: $12AN = 3 \cdot 16$; $AN = 4$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}; \frac{3}{12} = \frac{MN}{20}$$

adică: $12MN = 3 \cdot 20$; $MN = 5$

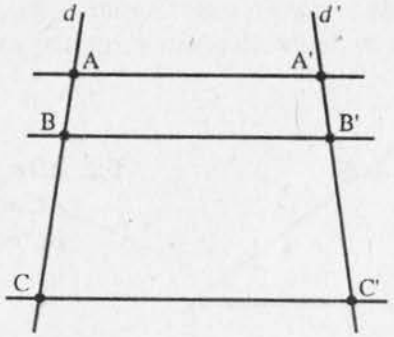
Reciproca: Dacă o dreaptă determină pe laturile unui triunghi segmente respectiv proporţionale cu aceste laturi, atunci această dreaptă este paralelă cu cea de-a treia latură a triunghiului.

Consecinţă: mai multe drepte paralele determină pe două secante segmente proporţionale.

Fie d şi d' două drepte secante care determină pe trei drepte paralele segmentele $[AA'] \parallel [BB'] \parallel [CC']$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC'}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$ sau

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}; \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$



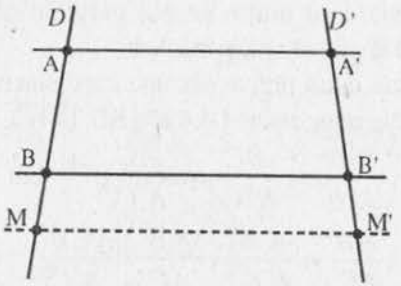
Ex.:

Dacă $AB = 2$; $BC = 7$; $A'B' = 5$ vom avea:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \; ; \; \frac{2}{7} = \frac{5}{B'C'} \; ;$$

$$2 \cdot B'C' = 7 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad B'C' = \frac{35}{2}$$

Reciproc: Fie D şi D' două drepte secante care întâlnesc două drepte paralele în punctele A ; A' şi respectiv B ; B' Dacă D şi D' întâlnesc o a treia dreaptă în punctele M şi M', astfel încât $\frac{AM}{AB} = \frac{A'M'}{A'B'}$, atunci această dreaptă este paralelă cu celelalte.



Ex.:

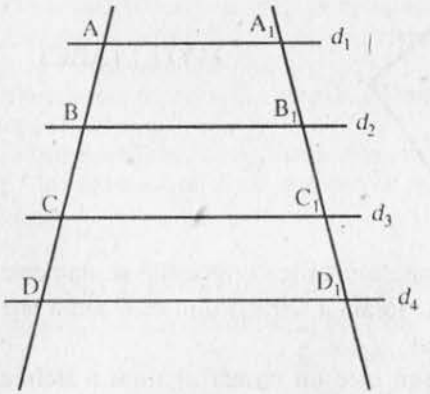
Dacă $AB = 10$; $AM = 15$ rezultă $\frac{AM}{AB} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

$A'B' = 4$; $A'M' = 6$ $\frac{A'M'}{A'B'} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Deci: $\frac{AM}{AB} = \frac{A'M'}{A'B'}$ şi rezultă: $(MM') \parallel (AA') \parallel (BB')$

TEOREMA PARALELELOR ECHIDISTANTE

Dacă mai multe paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe oricare secantă segmente congruente.



$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$

$$[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \Rightarrow [A_1B_1] \equiv [B_1C_1] \equiv [C_1D_1]$$

TEOREMĂ Propoziţie matematică care exprimă un adevăr ce trebuie să fie dovedit.

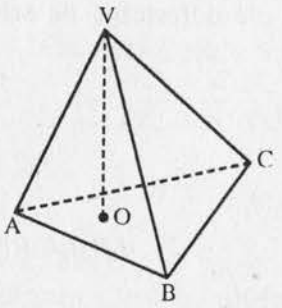
Ex.: Dacă un triunghi ABC este dreptunghic în A, atunci $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (teorema lui Pitagora)

TEOREMĂ RECIPROCĂ Teoremă obţinută dintr-alta, schimbând ipoteza cu concluzia şi concluzia cu ipoteza.

Ex.: Dacă într-un triunghi ABC, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ atunci triunghiul este dreptunghic în A.

Reciproca unei teoreme nu este întotdeauna adevărată.

TETRAEDRU Poliedru cu patru feţe. Tetraedrul are feţele triunghiuri, patru vârfuri şi şase muchii.



$[VO] \perp (ABC)$

Un tetraedru cu toate muchiile congruente se numeşte tetraedru regulat. Aria totală a tetraedrului este suma ariilor feţelor tetraedrului.

Volumul tetraedrului este un număr egal cu o treime din produsul dintre aria unei feţe şi înălţimea care este perpendiculară pe ea. În cazul tetraedrului regulat de muchie a:

$$S = a^2\sqrt{3} \text{ (aria)}$$

$$V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2} \text{ (volumul)}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3} \text{ (unghiul diedru)}$$

$$R = \frac{1}{4}a\sqrt{6} \text{ (raza sferei circumscrise)}$$

$$r = \frac{1}{12}a\sqrt{6} \text{ (raza sferei înscrise).}$$

THALES (c. 624 - c. 546 î.Hr.), filosof şi matematician grec din Milet. I se atribuie teorema care îi poartă numele.

Lui i se atribuie demonstraţia următoarelor teoreme:
1) diametrul împarte cercul în două părţi egale
2) egalitatea unghiurilor de la bază în triunghiul isoscel
3) egalitatea unghiurilor drepte
4) egalitatea triunghiurilor care au o latură şi unghiurile adiacente egale
5) faptul că unghiul înscris într-un semicerc este drept

În exprimarea lui Thales noţiunea de egalitate se referă la congruenţă.

TITLUL UNUI ALIAJ Raportul dintre masa metalului preţios conţinut de aliaj şi masa aliajului.

$T = \frac{m}{M}$ unde T este titlul aliajului;
M este masa aliajului;
m este masa metalului preţios.

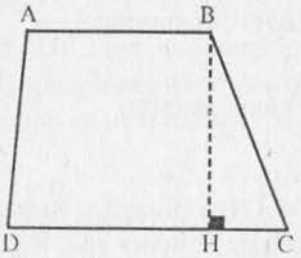
Ex.: Un aliaj conţine 423 grame aur şi 598 grame aramă (cupru). Care este titlul lui?

$M = 423 + 598 = 1021\ g$

$m = 423\ g;\ T = \frac{423\ g}{1021\ g} = 0,414$

Aceasta înseamnă că în 1000 g aliaj sunt 414 g aur.

TRAPEZUL Patrulaterul care are două laturi paralele şi celelalte două laturi neparalele.

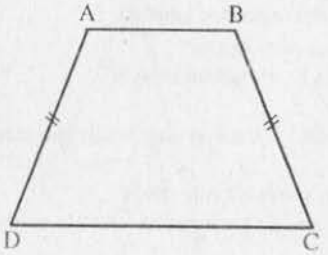


Trapez oarecare

$[AB]$ este baza mică.

$[CD]$ este baza mare.

$[AB] \parallel [CD]$

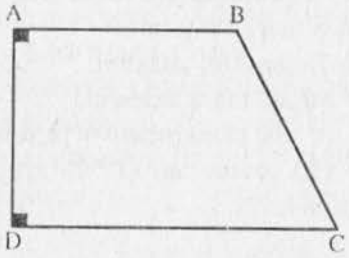


Trapez isoscel

Cele două laturi neparalele sunt congruente

$[AD] \equiv [BC]$

$\hat{D} \equiv \hat{C}$



Trapez dreptunghic

O latură neparalelă este perpendiculară pe baze

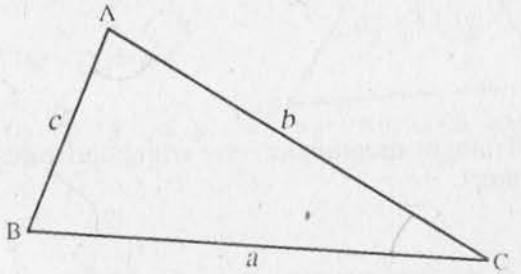
$[AD] \perp [AB]$

$[AD] \perp [CD]$

$\mathcal{A}_{[ABCD]} = \dfrac{(AB + CD) \cdot BH}{2}$ (aria trapezului)

TRIGONOMETRIE Parte a matematicii care se ocupă cu calculul triunghiurilor plane folosind funcţiile unghiurilor: sinus, cosinus, tangentă, cotangentă. Baza tuturor calculelor este triunghiul dreptunghic; orice alt triunghi se poate descompune prin coborârea unei înălţimi în două triunghiuri dreptunghice.

TRIUNGHI Poligon cu trei laturi.



A, B, C sunt puncte necoliniare.

Triunghiul este $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$.

ΔABC reprezintă notaţia pentru triunghi.

$[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ sunt laturile triunghiului.

$\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ sunt unghiurile triunghiului.

$[AB]$ se notează şi cu c;

$[BC]$ se notează şi cu a;

$[CA]$ se notează şi cu b.

Perimetrul este suma laturilor triunghiului.

$\mathcal{P} = a + b + c$.

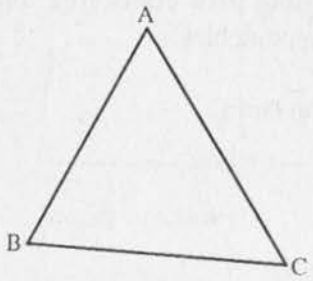
p este semiperimetrul, adică $\mathcal{P} = 2p$.

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Clasificarea triunghiurilor

I După măsurile unghiurilor:

1) Triunghi ascuțitunghic este un triunghi cu toate unghiurile ascuțite.

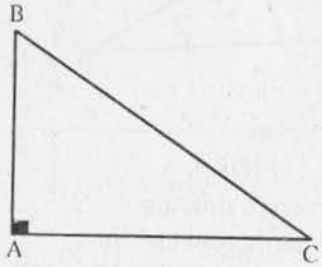


$m(\sphericalangle A) < 90^\circ$

$m(\sphericalangle B) < 90^\circ$

$m(\sphericalangle C) < 90^\circ$

2) Triunghi dreptunghic este triunghiul care are un unghi drept.

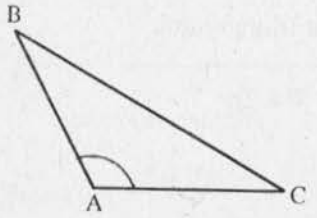


$m(\sphericalangle A) = 90^\circ$

$[AB]$ și $[AC]$ se numesc catete;

$[BC]$ se numește ipotenuză.

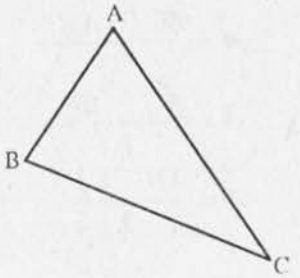
3) Triunghi obtuzunghic este triunghiul care are un unghi obtuz.



$m(\sphericalangle A) > 90^\circ$

II. După laturi:

1) Triunghi oarecare sau scalen este un triunghi cu toate laturile diferite între ele.

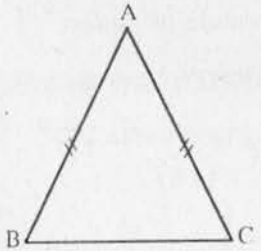


$[AB] \not\equiv [BC]$;

$[BC] \not\equiv [AC]$;

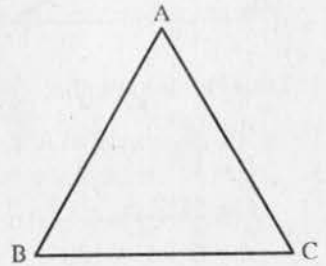
$[AC] \not\equiv [AB]$.

2) Triunghi isoscel este un triunghi cu două laturi congruente.



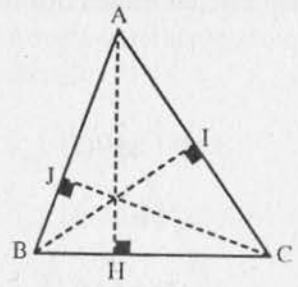
$[AB] \equiv [AC]$

3) Triunghi echilateral este un triunghi cu toate laturile congruente.



$[AB] \equiv [AC] \equiv [BC]$

Aria triunghiului:



$$\mathcal{A} = \frac{\text{baza} \cdot \text{înălțimea}}{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{BC \cdot AH}{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{AC \cdot BI}{2}$$

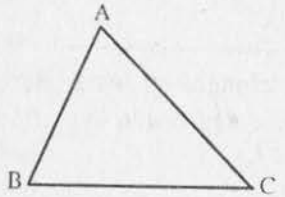
$$\mathcal{A} = \frac{AB \cdot CJ}{2}$$

Notând $[AB] = c$
$[AC] = b$
$[BC] = a$

aria se poate calcua și cu formula lui Heron:

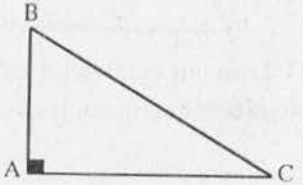
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Suma unghiurilor unui triunghi este 180°.
$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$.



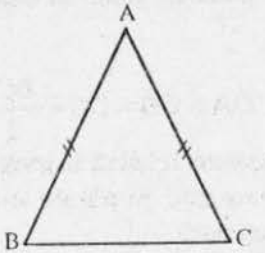
Triunghi oarecare

$\hat{A} = 55^\circ$
$\hat{B} = 75^\circ$
$\hat{C} = 50^\circ$
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$



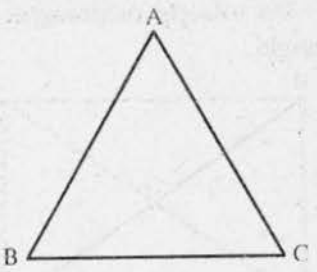
Triunghi dreptunghic

$\hat{A} = 90^\circ$
$\hat{B} = 36^\circ$
$\hat{C} = 54^\circ$
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$



Triunghi isoscel

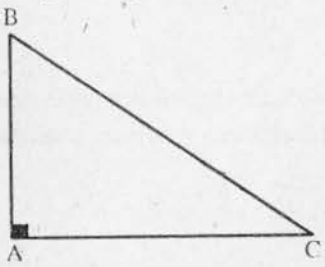
$\hat{A} = 40^\circ$
$\hat{B} = 70^\circ$
$\hat{C} = 70^\circ$
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$



Triunghi echilateral

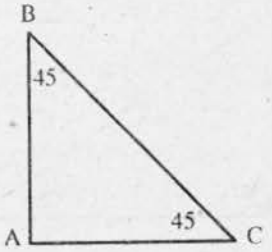
$\hat{A} = 60^\circ$
$\hat{B} = 60^\circ$
$\hat{C} = 60^\circ$
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

TRIUNGHI DREPTUNGHIC Un triunghi care are un unghi drept.

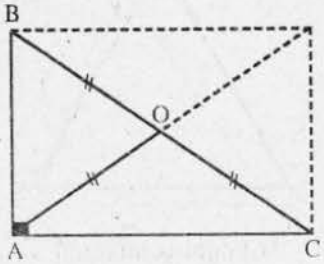


ΔABC triunghi dreptunghic în A.
$[BC]$ este ipotenuza.

ΔABC triunghi dreptunghic isoscel.
$m(\hat{C}) = m(\hat{B}) = 45^\circ$



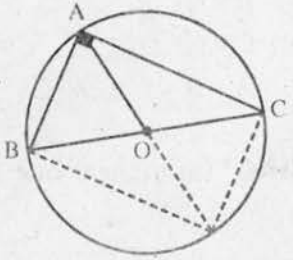
Un triunghi dreptunghic este jumătate dintr-un dreptunghi.



$$OA = OB = OC = \frac{BC}{2}$$

Mediana relativă la ipotenuza este jumătate din ipotenuză.

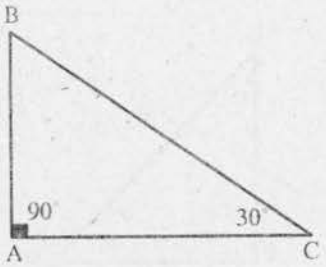
$$AO = \frac{BC}{2}$$



Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este la jumătatea ipotenuzei.

$OA = OB = OC = OD = R.$

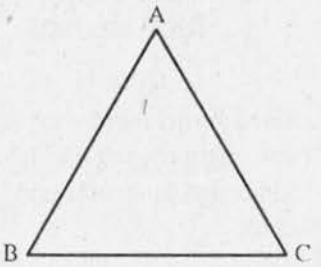
Într-un triunghi dreptunghic, cateta care se opune unui unghi cu măsura de 30°, are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.



$[AB] \perp [AC]$

$$AB = \frac{1}{2} BC$$

TRIUNGHIUL ECHILATERAL Un triunghi cu toate laturile congruente.



$[AB] \equiv [BC] \equiv [AC]$

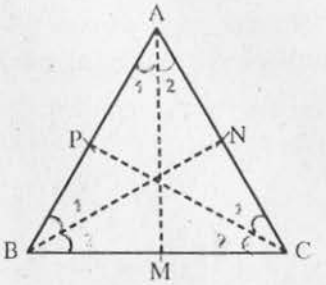
Unghiurile triunghiului echilateral sunt congruente.

$m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60°$

Un triunghi echilateral are toate medianele congruente.

Într-un triunghi echilateral medianele sunt şi înălţimi şi bisectoare şi mediatoare.

$[AM] \perp [BC]$;
$[BN] \perp [AC]$;
$[CP] \perp [AB]$;

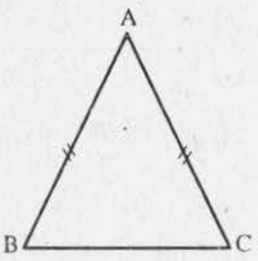


$[AP] \equiv [PB]$;
$[AN] \equiv [NC]$;
$[BM] \equiv [MC]$;

$\hat{A}_1 \equiv \hat{A}_2$;
$\hat{B}_1 \equiv \hat{B}_2$;
$\hat{C}_1 \equiv \hat{C}_2$.

Într-un triunghi echilateral ortocentrul este şi centru de greutate şi centrul cercului circumscris şi centrul cercului înscris.

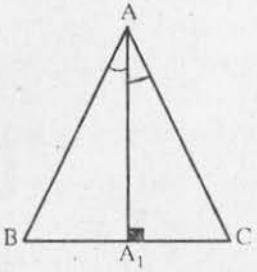
TRIUNGHI ISOSCEL Un triunghi cu două laturi congruente.



$[AB] \equiv [AC]$
$[BC]$ este bază
$\hat{B} \equiv \hat{C}$

Dacă un triunghi este isoscel, unghiurile opuse laturilor congruente sunt congruente.

Într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului de la vârf este și mediană și mediatoare și înălțime.

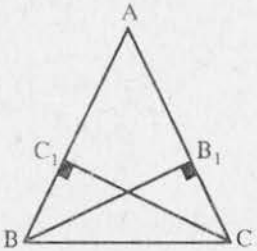


$[AA_1] \perp [BC]$

$[BA_1] \equiv [A_1C]$

$\sphericalangle BAA_1 \equiv \sphericalangle A_1AC$

Într-un triunghi isoscel înălțimile, medianele și bisectoarele corespunzătoare laturilor congruente, sunt congruente.

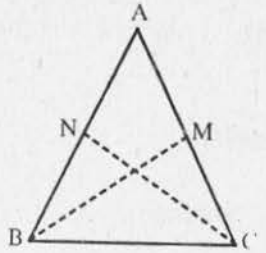


$[AB] \equiv [AC]$

$[BB_1] \perp [AC]$

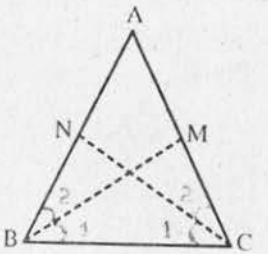
$[CC_1] \perp [AB]$

$\Delta BB_1C \equiv \Delta CC_1B \Rightarrow [CC_1] \equiv [BB_1]$



$[AM] \equiv [MC] \equiv [AN] \equiv [NB]$

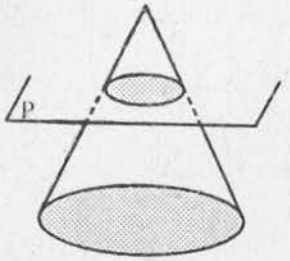
$\Delta BMC \equiv \Delta CBN \Rightarrow [BM] \equiv [CN]$

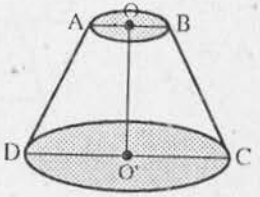


$\hat{C}_1 \equiv \hat{C}_2 \equiv \hat{B}_2 \equiv \hat{B}_2$

$\Delta BMC \equiv \Delta CNB \Rightarrow [CN] \equiv [BM]$

TRUNCHI DE CON Corp mărginit de o pânză conică circulară, de baza acestuia și de un plan paralel cu ea, situat de aceeași parte a vârfului ca și baza.

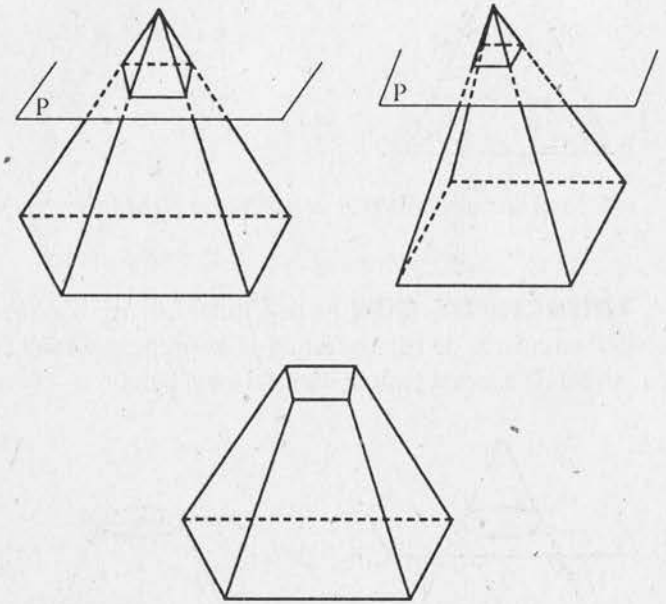




$AO = r$, (raza bazei mici);
$DO' = R$, (raza bazei mari);
$AD = G$, (generatoare);
$OO' = h$, (înălţime).
$A_l = \pi G(R + r)$, (aria laterală).

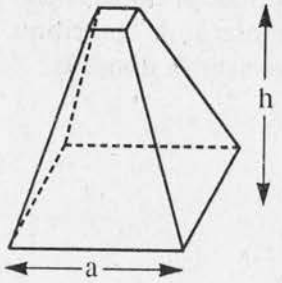
$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr), \text{ (volumul).}$$

TRUNCHI DE PIRAMIDĂ Corp rezultat prin secţionarea unei piramide cu un plan paralel cu baza ei, îndepărtând piramida mai mică obţinută.



Feţele laterale sunt trapeze.

Trunchi de piramidă regulată este un trunchi cu bazele poligoane regulate.



Apotema trunchiului de piramidă este înălţimea unei feţe. Aria laterală a unui trunchi de piramidă regulată:

$$\mathcal{A}_l = \frac{(P + p)a_p}{2}$$

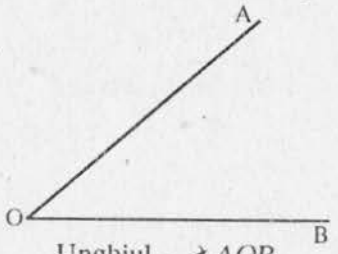
unde $\mathcal{P}$ = perimetrul bazei mari;
p = perimetrul bazei mici;
a_p = apotemă.

Volumul: $V = \frac{h}{3}\left(S + s + \sqrt{Ss}\right)$

unde h = înălţimea;
S = aria bazei mari;
s = aria bazei mici.

ŢIŢEICA, Gheorghe (1873 - 1939), matematician român. Profesor universitar la Bucureşti. Membru al Academiei Române. Lucrări în domeniul geometriei şi de matematică elementară. A contribuit la dezvoltarea învăţământului matematic în România.

UNGHI Figură geometrică formată din două semidrepte care au aceeaşi origine.



O = vârful unghiului.

Unghiul $\sphericalangle AOB$

Semidreptele $[OA$, $[OB$ se numesc laturile unghiului.

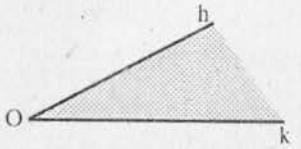
Unghi alungit este un unghi cu laturile în prelungire.

Unghiul nul este unghiul format de două semidrepte identice.

$\sphericalangle AOB$ = unghi cu laturile în prelungire.

$\sphericalangle AOB$ = unghi nul.

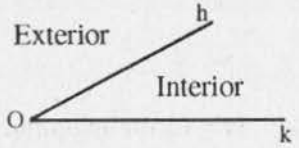
Unghi propriu este un unghi care nu este nici nul nici alungit.



$\sphericalangle hk$ unghi propriu

Interiorul unghiului este porţiunea haşurată.

Exteriorul unghiului este porțiunea din plan care nu aparține nici interiorului, nici laturilor lui.



$\widehat{hk}$ unghi propriu

Exterior

Deschiderea dintre semidreptele care formează un unghi se măsoară.

Unitatea de măsură a unghiurilor este gradul.

1° = un grad

Un unghi alungit are 180°.

Un unghi nul are 0°.

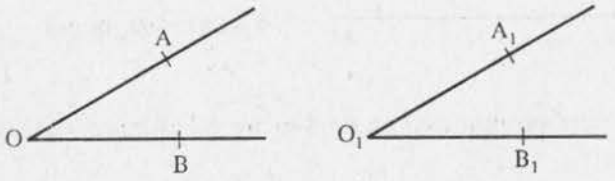
$1^\circ = 60'$; un grad are 60 minute.

$1' = 60''$; un minut are 60 secunde.

Măsura unghiului AOB se notează $m(\sphericalangle AOB)$.

Unghiurile se măsoară cu raportorul.

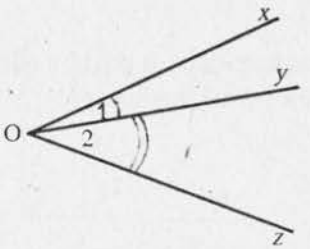
Unghiuri congruente sunt unghiuri care au măsurile egale.



Unghiuri congruente

$m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle A_1O_1B_1) \Rightarrow \sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A_1O_1B_1$

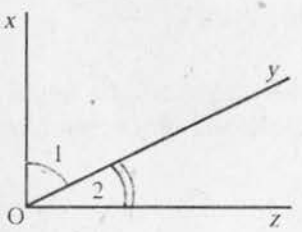
Unghiuri adiacente sunt două unghiuri proprii care au vârful și o latură comune, iar celelalte două laturi sunt situate de o parte și de alta a laturii comune.



Unghiuri adiacente

Unghiuri complementare sunt două unghiuri care au suma măsurilor egală cu 90°.

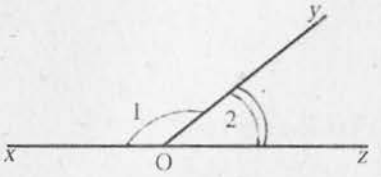
Unghiuri suplementare sunt două unghiuri care au suma măsurilor egală cu 180°.



Unghiuri complementare

$m(\sphericalangle xOy) + m(\sphericalangle yOz) = m(\sphericalangle xOz) = 90^\circ$.

$\sphericalangle 2$ este complementul $\sphericalangle 1$.



Unghiuri suplementare

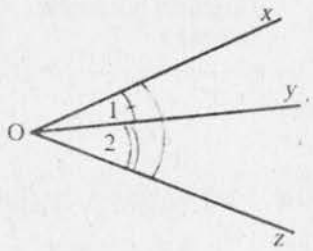
$m(\sphericalangle xOy) + m(\sphericalangle yOz) = m(\sphericalangle xOz) = 180^\circ$.

$\sphericalangle 2$ este suplementul $\sphericalangle 1$.

Dacă două unghiuri au același complement sau suplement, ele sunt congruente.

Operaţii cu unghiuri:

1) suma a două unghiuri adiacente este un unghi a cărui măsură este suma măsurilor celor două unghiuri.

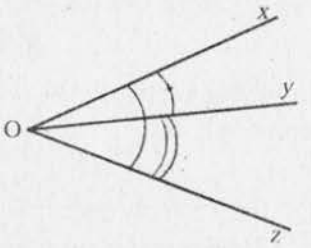


Suma a două unghiuri

$\sphericalangle xOz$ este suma unghiurilor $\sphericalangle xOy$ şi $\sphericalangle yOz$.

$m(\sphericalangle xOz) = m(\sphericalangle xOy) + m(\sphericalangle yOz)$.

2) diferenţa a două unghiuri adiacente este un unghi a cărui măsură este egală cu diferenţa măsurilor celor două unghiuri.

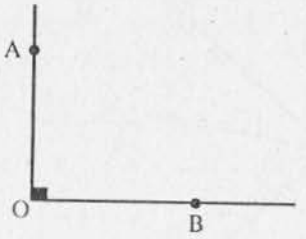


Diferenţa a două unghiuri

$\sphericalangle xOy$ este diferenţa $\sphericalangle xOz$ şi $\sphericalangle yOz$.

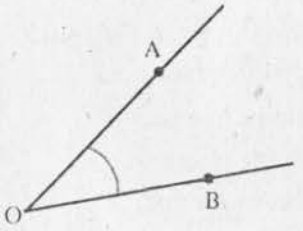
$m(\sphericalangle xOy) = m(\sphericalangle xOz) - m(\sphericalangle yOz)$.

Unghi drept este un unghi congruent cu suplementul său.
Măsura unghiului drept este 90°.



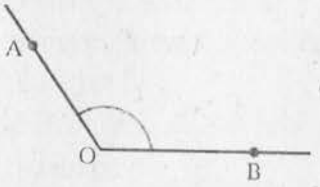
$m(\sphericalangle AOB) = 90°$
Unghi drept .

Unghi ascuţit este un unghi a cărui măsură este mai mică decât 90°.



$m(\sphericalangle AOB) < 90°$
Unghi ascuţit

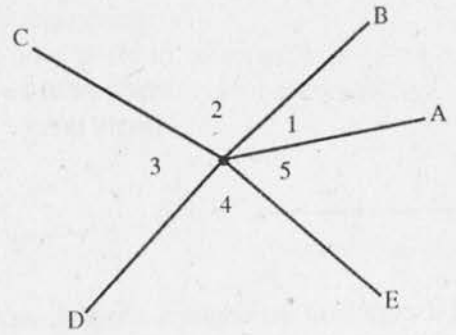
Unghi obtuz este un unghi a cărui măsură este mai mare decât 90°.



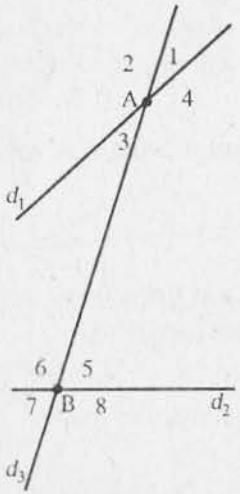
$m(\sphericalangle AOB) > 90°$
Unghi obtuz

Unghiurile formate în jurul unui punct au ca sumă a măsurilor lor 360°.

$m(\sphericalangle 1) + m(\sphericalangle 2) + m(\sphericalangle 3) + m(\sphericalangle 4) + m(\sphericalangle 5) = 360°$.



Unghiuri formate de două drepte cu o secantă.



$d_1 \cap d_3 = \{A\}$.

$d_2 \cap d_3 = \{B\}$.

$\hat{3}, \hat{5}$ - alterne interne;

$\hat{4}, \hat{6}$ - alterne interne;

$\hat{1}, \hat{7}$ - alterne externe;

$\hat{2}, \hat{8}$ - alterne externe;

$\hat{4}, \hat{5}$ - interne şi de aceeaşi parte a secantei;

$\hat{3}, \hat{6}$ - interne şi de aceeaşi parte a secantei;

$\hat{1}, \hat{8}$ - externe şi de aceeaşi parte a secantei;

$\hat{2}, \hat{7}$ - externe şi de aceeaşi parte a secantei;

$\hat{1}, \hat{5}$ - corespondente;

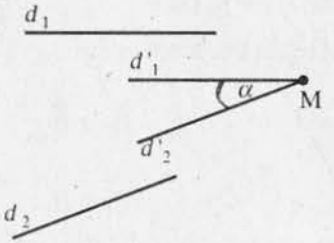
$\hat{2}, \hat{6}$ - corespondente;

$\hat{3}, \hat{7}$ - corespondente;

$\hat{4}, \hat{8}$ - corespondente.

Unghiul a două drepte în spaţiu

Orice unghi ascuţit format de paralele la drepte date, duse printr-un punct.

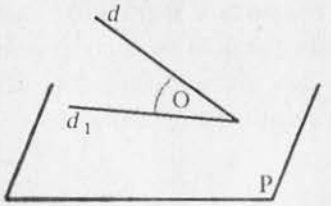


$d'_1 \parallel d_1$

$d'_2 \parallel d_2$

Unghiul unei drepte cu un plan

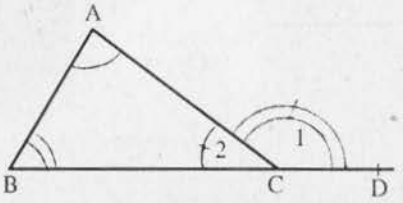
Unghiul făcut de dreaptă cu proiecţia ei pe plan.



$d_1 = pr_P d$

Unghi exterior al unui triunghi

Unghi adiacent şi suplementar cu un unghi al unui triunghi.

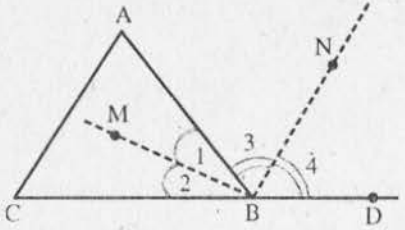


$\hat{C}_1$ = unghi exterior

Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri ale triunghiului, neadiacente cu el.

$$m(\sphericalangle C_1) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$$

Bisectoarele $\widehat{ABC}$ și $\widehat{ABD}$ sunt perpendiculare.

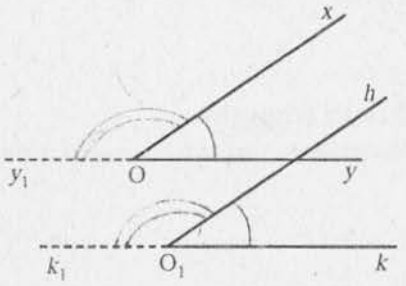


$\hat{B}_1 \equiv \hat{B}_2$;

$\hat{B}_3 \equiv \hat{B}_4$;

$MB] \perp [BN$.

Unghiuri cu laturile respectiv paralele Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente dacă sunt ambele ascuțite sau ambele obtuze și sunt suplementare dacă unul este ascuțit, iar celălalt obtuz.



$[Ox \parallel [O_1h$;

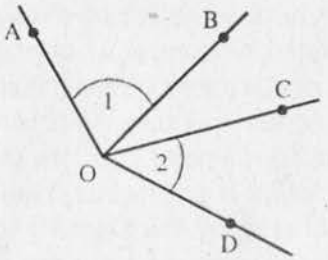
$[Oy \parallel [O_1k$.

$\widehat{xOy} \equiv \widehat{hO_1k}$;

$\widehat{xOy_1} \equiv \widehat{hO_1k_1}$.

$$m(\widehat{xOy}) + m(\widehat{hO_1k_1}) = 180^\circ.$$

Unghiuri cu laturi respectiv perpendiculare



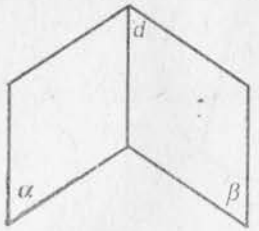
$[OA \perp [OC$

$[OB \perp [OD$

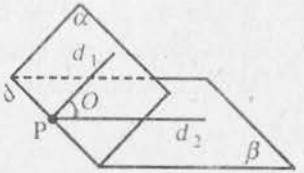
$\Rightarrow \hat{O}_1 \equiv \hat{O}_2$

Două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare sunt congruente dacă ambele sunt ascuțite sau obtuze și sunt suplementare dacă unul este ascuțit, iar celălalt obtuz.

Unghiuri diedre Figura formată de două semiplane delimitate de aceeași dreaptă d, în două plane diferite α și β ce conțin dreapta d.



Unghi plan al unghiului diedru este valoarea unghiului dintre două semidrepte conținute în cele două semiplane, având originea într-un punct P aparținând dreptei de intersecție și perpendiculare pe această dreaptă.



$\alpha \cap \beta = d$

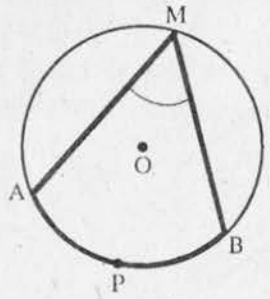
$P \in d$

$d_1 \perp d$

$d_2 \perp d$.

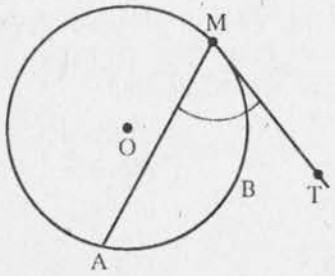
Cele două semiplane se numesc feţele diedrului. Dreapta de intersecţie a celor două semiplane se numeşte muchia diedrului. Două diedre se numesc *adiacente* dacă au aceeaşi muchie, una din feţe este comună şi celelalte două feţe sunt de o parte şi de alta a feţei comune. Planul care trece prin muchia diedrului şi-l împarte în două unghiuri diedre congruente, se numeşte *plan bisector.* Dacă două diedre au feţele unuia în prelungirea celuilalt se numesc *diedre opuse la muchie.* Dacă două plane formează între ele patru diedre congruente ele sunt perpendiculare, fiecare diedru fiind drept.

Unghiuri în cerc Unghi înscris în cerc este unghiul cu vârful pe cerc, care are ca laturi două coarde.



$$m(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{APB})$$

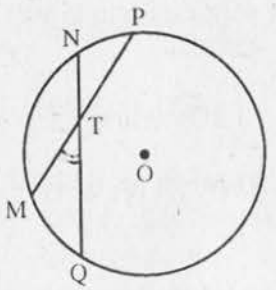
Unghi înscris în cerc



$$m(\widehat{AMT}) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{ABM})$$

Unghi cu vârful pe cerc, care are o latură tangentă la cerc, iar cealaltă,coardă

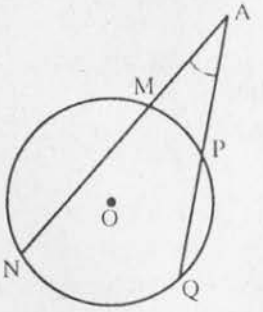
Unghi cu vârful în interiorul cercului este un unghi al cărui vârf este un punct din cerc diferit de centrul cercului.



$$m(\widehat{MTQ}) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{MQ}) + m(\overset{\frown}{NP})]$$

Unghi cu vârful în interiorul cercului

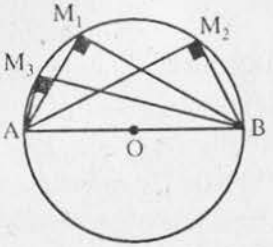
Unghi cu vârful în exteriorul cercului este un unghi al cărui vârf este un punct din exteriorul cercului, iar laturile lui sunt secante sau tangente.



$$m(\widehat{NAQ}) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{NQ}) - m(\overset{\frown}{MP})]$$

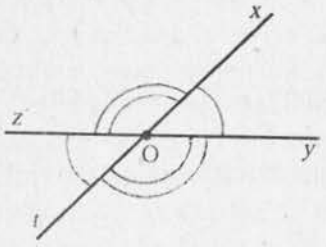
Unghi cu vârful în exteriorul cercului

Toate unghiurile înscrise într-un semicerc sunt unghiuri drepte.



$$m(\hat{M}_1) = m(\hat{M}_2) = m(\hat{M}_3) = 90^\circ$$

Unghiuri opuse la vârf Două unghiuri cu același vârf și cu laturile în prelungire.



$\sphericalangle xOy$ este opus la vârf cu $\sphericalangle zOt$

$\widehat{xOy} \equiv \widehat{zOt}$

$m(\sphericalangle xOy) = m(\sphericalangle zOt)$

Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.

$m(\sphericalangle xOz) = m(\sphericalangle yOt)$

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Prefixe pentru multipli:

kilo (k) - de 1000 ori mai mare.
hecto (h) - de 100 ori mai mare.
deca (da) - de 10 ori mai mare.

Prefixe pentru submultipli:

deci (d) - de 10 ori mai mic.
centi (c) - de 100 ori mai mic.
mili (m) - de 1000 ori mai mic.

Unități de măsură pentru lungime:

kilometrul (km) = 1000m = 10^3m.
hectometrul (hm) = 100m = 10^2m.
decametrul (dam) = 10m = 10^1m.
metrul (m) = 1 m = 10^0m.

decimetrul (dm) = $\frac{1}{10}$ m = 10^{-1}m = 0,1m.

centimetrul (cm) = $\frac{1}{100}$ m = 10^{-2}m = 0,01m.

milimetrul (mm) = $\frac{1}{1000}$ m = 10^{-3}m = 0,001m.

Unități de măsură pentru masă:

kilogramul (kg) = 1000g = 10^3g.
hectogramul (hg) = 100g = 10^2g.
decagramul (dag) = 10g = 10^1g.
gramul (g) = 1g = 10^0g.

decigramul (dg) = $\frac{1}{10}$ g = 10^{-1} g = 0, 1g.

centigramul (cg) = $\frac{1}{100}$ g = 10^{-2} g = 0,01g.

miligramul (mg) = $\frac{1}{1000}$ g = 10^{-3} g = 0,001g.

Se mai folosesc:
tona (t) = 1000 kg.
quintalul (q) = 100 kg.

Unități de măsură de timp:

secunda (s) = 1s.
minutul (min) = 60 s.
ora (h) = 60 min = 3.600 s.
ziua (d) = 24 h = 86.400 s.
săptămâna = 7 zile.
anul = intervalul dintre 1 ianuarie ora 0 și 31 decem-

brie ora 24.

1 an are 365 zile sau 366 zile (an bisect).

1 an are 12 luni.

An bisect - anul în care luna februarie are 29 zile.

Anii bisecți se succed din 4 în 4 ani.

Deceniu = 10 ani.

Secol = 100 ani.

Mileniu = 1000 ani.

Unități de măsură pentru arii:

Unitatea de măsură pentru arie este pătratul unității de lungime.

$1m^2$ = aria unui pătrat cu latura de 1m.

$1km^2 = 10^6 m^2$.

$1hm^2$ = 1 ha (hectar) = $10^4 m^2$.

$1dam^2$ = 1 ar = $10^2 m^2$.

$1dm^2 = 10^{-2} m^2$.

$1cm^2 = 10^{-4} m^2$.

$1mm^2 = 10^{-6} m^2$.

Unități de măsură pentru volume:

Unitatea de măsură pentru volum este egală cu volumul unui cub de muchie 1m.

$1m^3$ = un metru cub

$1m^3 = 10^3 dm^3 = 10^6 cm^3 = 10^9 mm^3$

Unitatea principală care se folosește pentru măsurarea volumului vaselor este litrul.

1kl = 10hl = 100dal = 1000l

1hl = 10dal = 100l

1dal = 10l

1l = 10dl = 100cl = 1000ml

1dl = 10cl = 100ml

1cl = 10ml

În practică pentru măsurarea cerealelor se folosește dubludecalitru.

1ddal = 2dal = 20l

VÂLCOVICI, Victor (1885 - 1970), matematician român. Profesor universitar la Iaşi, Timişoara şi Bucureşti. Membru al Academiei Române. Lucrări de matematică aplicată.

VALOARE ABSOLUTĂ Valoarea a două numere opuse, care au aceeaşi distanţă faţă de zero. Se defineşte prin:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a \geq 0 \\ -a, \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$$

VALOARE NUMERICĂ A UNEI EXPRESII ALGEBRICE Valoarea unei expresii în care literele au fost înlocuite cu numere.

$E(x, y) = 2x^2 + 4xy - y^2 + 3x - 2y + 1$

pentru $x = 0,\ y = 2$

$E(0, 2) = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 2 - 2^2 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 1 =$

$= -4 - 4 + 1 = -7$

pentru $x = 1,\ y = -1$

$E(1, -1) = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot (-1) - (-1)^2 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1 =$

$= 2 - 4 - 1 + 3 + 2 + 1 = 3$

Literele conţinute în expresie se numesc variabile. Mulţimea sistemelor de valori admise pentru variabile formează *domeniul de definiţie* al expresiei algebrice. *Domeniul de definiţie* este condiţionat şi de natura mărimilor variabile pe care le conţin.

VARIABILĂ Simbol pentru care pot fi introduse elemente ale unei mulţimi de definiţie. Cel mai frecvent pentru variabile se folosesc literele: $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

La introducerea elementelor mulţimii de definiţie pentru variabile, trebuie urmărit ca aceleaşi variabile să se înlocuiască cu aceleaşi elemente. La variabile diferite, corespund mulţimi de definiţie diferite.

$$E(x, y, z) = \frac{3x^2 \cdot \sqrt{y^3}}{2z} \quad ; \quad x, y, z \in \mathbb{R},\ z \neq 0$$

$$E(2, 3, -4) = \frac{3 \cdot (2)^2 \cdot \sqrt{3^3}}{2 \cdot (-4)} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{-8_2} = -\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

VIÉTE, François (1540 - 1603), matematician francez. Este unul dintre creatorii algebrei prin celebra lucrare „Canon mathematicus". A dat un algoritm pentru calculul numărului π cu ajutorul unui produs infinit.

VOLUM AL UNUI CORP GEOMETRIC Măsura pentru spaţiul umplut de corp. Unitatea de volum este volumul unui cub cu lungimea muchiei o unitate de lungime (cub unitate).

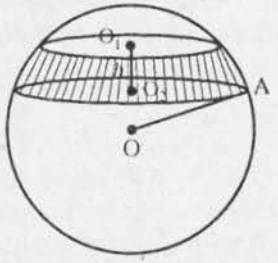
ZERO sau NUL Elementul neutru referitor la adunarea numerelor. Pentru orice număr a:

$a + 0 = a$; $a^0 = 1$

$a \cdot 0 = 0$; $0^a = 0$.

Expresia $0 : 0$ nu este un număr unic determinat. Expresia 0^0 este şi ea nedeterminată. În reprezentările cifrelor, 0 joacă un rol important în marcarea poziţiilor (90; 900; 9000 sunt numere diferite). În secolul VIII d. Hr. indienii au introdus o dată cu sistemul zecimal şi zero-ul. În Europa, deşi era cunoscut de arabi în secolul XII, el a fost generalizat în jurul anului 1500.

ZONA SFERICĂ Parte dintr-o sferă cuprinsă între două plane paralele.



$OA = R$ (raza sferei).

$O_1O_2 = h$ (înălţimea zonei).

$A = 2\pi Rh$.

LISTA TERMENILOR

	pagina
Adunare	7
Alfabetul grec	7
Algebră	8
Algoritm	9
Algoritmul lui Euclid	10
Amplificare	10
Apotemă	10
Arc capabil de unghi dat	10
Arc de cerc	11
Arhimede	11
Aric	11
Aritmetică	14
Asemănare	14
Asociativitate	17
Axa numerelor	17
Axa radicală	18
Axiomă	19
Bacaloglu, Emanoil	20
Bază	20
Bézout, Etienne	20
Bisectoare	20
Bolyai, Janoş	21
Bolzano, Bernhard	22
Boole, George	22
Bourbaki	22
Cadran	23

Calotă sferică 23
Catetă 23
Cebîşev, Pafnuti Lvovici 23
Centru de greutate 24
Cel mai mare divizor comun 43
Cel mai mic multiplu comun 24
Cerc 24
Cercul circumscris triunghiului 30
Cercul înscris triunghiului 30
Ceva, Giovanni 31
Cifrele romane 31
Cilindru 31
Ciurul lui Eratostene 32
Coardă 32
Codomeniu 33
Coeficient 33
Colinearitate 33
Comensurabil 34
Comutativitate 34
Con 34
Concentric 35
Concluzie 35
Congruent 36
Congruenţa triunghiurilor 36
Constantă 38
Construcţii geometrice 38
Coordonate în plan 43
Coplanar 44
Corp geometric 45
Cub 45

D'Alembert, Jean le Rond 46
De Morgan, Augustus 46

Descartes, René 46
Descompunere în factori 46
Diagonală 47
Diagrama Euler-Venn 47
Diametral opus 47
Diametru 47
Diedru 47
Diofant 48
Dirichlet, Peter Gustav 48
Distanţă 48
Divizibilitate 50
Dreaptă 52
Dreptunghi 57

Ecuaţie 59
Ecuaţia de gradul I 61
Ecuaţia de gradul al II-lea 64
Elemente de trigonometrie 65
Emmanuel, David 68
Eratostene 68
Euclid (Eukleides) 68
Euler, Leonhard 69
Expresie matematică 69

Formulă 70
Formule de calcul prescurtat 71
Fracţii 71
Fracţii algebrice 74
Fracţii periodice 75
Fracţii zecimale finite 77
Funcţii 78

Gauss, Karl Friederich 83

Geometrie 83
Geometrie în spaţiu 83
Grad 84
Hadamard, Jaques 84
Haimovici, Mendel 84
Heron 84
Hilbert, David 85
Horezmi, Muhammed ben Musaal 87
Huygens, Cristian 87

Identitate 88
Inecuaţie 88
Inegalităţi 89
Intersecţia a două drepte 91
Intervale 92
Ipoteză 93
Împărţire 94
Înălţimile unui triunghi 97
Înmulţire 98

Klein, Felix 99

Lalescu, Traian 99
Leonardo (Fibonacci) 99
Linie mijlocie 99
Loc geometric 100
Lobacevski, Nicolai Ivanovici 101
Lungime 101

Matematică 103
Mărimi direct proporţionale 104
Mărimi invers proporţionale 105
Medianele unui triunghi 106

Mediatoarele unui triunghi 107
Medie 108
Modul 109
Moisil, Grigore C. 110
Monom 110
Mulţimi 112

Notaţii 116
Număr 117
Număr impar 117
Număr iraţional 117
Număr întreg 118
Număr natural 121
Număr par 128
Număr prim 129
Număr raţional 130
Numere reale 135
Numere pitagoreice 136
Numitor comun 136

Octogon 137
Omar, Khayyam 137
Operaţii fundamentale ale aritmeticii 137
Opus 138
Orientare 138
Ortocentru 138
Ortogonal 138

Paralele 139
Pascal, Blaise 140
Paralelipiped 140
Paralelogram 141
Paranteze 142

Parte întreagă 143
Patrulater 143
Pătrat 145
Peano, Giuseppe 146
Perimetru 146
Perpendiculară 146
Piramidă 147
Pitagora 148
Plan 149
Poliedru 149
Poligon 150
Polinom 152
Popoviciu, Tiberiu 158
Prismă 158
Probă 160
Probleme de gradul I şi II 160
Procent 162
Produs cartezian 164
Proiecţii ortogonale 164
Proporţie 166
Proporţionalitate 168
Propoziţie 169
Ptolemeu, Claudiu (Claudius Ptolemaios) 169
Punct 169
Puncte colineare 170
Puterea unui număr natural 170
Puterea unui punct faţă de un cerc 170

Radian 172
Radical 172
Raport 172
Raţionalizare 175
Rădăcină 176

Rădăcină pătrată 176
Reciproca unei teoreme 178
Reducerea la absurd 178
Regula de trei compusă 178
Regula de trei simplă 179
Relaţia de ordine în ℕ 179
Romb 179
Rotunjire 180
Russel, Bertrand 181

Scădere 182
Secantă 182
Sector circular 183
Segment 183
Semidreaptă 185
Semiplan 186
Sens 187
Sfera 187
Simetria 190
Simplificare 194
Simson, Thomas 194
Sistem de numeraţie binar 195
Sistem de numeraţie zecimal 197
Sisteme de ecuaţii 197
Submulţimi v. Mulţimi 202
Stevin, Simon (Simon de Bruges) 202

Tabele matematice 203
Tangentă 210
Teorema catetei 211
Teorema celor trei perpendiculare 212
Teorema împărţirii întregi 212
Teorema înălţimii 212

Teorema lui Bézout 213
Teorema lui Pitagora 213
Teorema lui Thales 214
Teorema paralelelor echidistante 217
Teoremă 217
Teoremă reciprocă 218
Tetraedru 218
Thales 219
Titlul unui aliaj 219
Trapezul 220
Trigonometrie 221
Triunghi 221
Triunghi dreptunghic 225
Triunghi echilateral 227
Triunghi isoscel 228
Trunchi de con 229
Trunchi de piramidă 230

Ţiţeica, Gheorghe 232

Unghi 233
Unităţi de măsură 244

Vâlcovici, Victor 248
Valoare absolută 248
Valoare numerică a unei expresii algebrice 248
Variabilă 248
Viète, François 249
Volum al unui corp geometric 249

Zero sau Nul 250
Zona sferică 250